١٤٣١هـ / ٢٠١٠م

مائة سؤالاً محلولاً في التهيئة لمسابقة أولمبياد الرياضيات

تأليف الأستاذ /

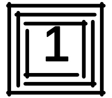
طارق بن عامر بن سعدون الصيعري

مائة سؤالاً محلولة في التهيئة لمسابقة ألمبياد الرياضيات

١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م

تأليف الأستاذ / طارق بن عامر الصيعري

تأليف الأستاذ / طارق الصيعري



حل المعادلة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\text{لو}_4(س) + \text{لو}_4(س - 6) = ٢$$

الحل :

فكر في خصائص اللوغاريتمات

$$\text{لو}_4(س) + \text{لو}_4(س - 6) = ٢ \Leftarrow \text{لو}_4\big(س(س - 6)\big) = ٢$$

$$\Leftarrow س(س - 6) = 4^{٢}$$

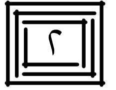
$$\Leftarrow س^{٢} - 6س = 16$$

$$\Leftarrow س^{٢} - 6س - 16 = 0$$

$$\Leftarrow (س + ٢)(س - 8) = 0$$

∴ إما س = - ٢ وهذا غير ممكن .

أو س = ٨ وهذا مقبول وهو الحل الصحيح .



حل النظام التالي :

$$\begin{cases} لو_{١٠} \{ س + ص \} = ١ \\ لو_{٢} س + ٢ لو_{٤} ص = ٤ \end{cases}$$

الحل :

فكر في خصائص اللوغاريتمات

١) $لو_{م} س = ب \Longleftrightarrow م^{ب} = س$

٢) $لو \{ س \times ص \} = لو س + لو ص$

٣) $لو_{م} س = لو_{[م]} [س|$

٤) $ب لو_{م} س = لو_{م} س^{ب}$

الآن :

من المعادلة الأولى نستنتج أن : س + ص = ١٠ .... ~١

من المعادلة الثانية نجد أن :

لو ٢ س + ٢لو ٤ ص = ٤ ⇐ لو ٢ س + لو ٤ $ص^{٢}$ = ٤

⇐ لو ٢ س + لو٢ص = ٤ ⇐ لو ٢ { س × ص } = ٤

⇐ { س × ص } = ١٦ .... ~٢

الآن :

بالتعويض من المعادلة ~١ في ~٢ وحل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

سنجد أن : س = ٢ ، ص = ٨ أو العكس .

3

إذا كان : ٍ ٍ s + 4 ٍ ٍ s = 4ٍ

أوجد قيمة : ٍ ٍ s

الحل :

فكر بالتعويض :

ٍ ٍ s + 4 ٍ ٍ s = 4ٍ Ü ٍ ٍ s + (ٍ ´ ٍ) ٍ s = 4ٍ

Ü ٍ ٍ s + ٍ ٍ s ´ ٍ ٍ s = 4ٍ

∴ ممكن أن نستخدم التعويض : W = ٍ ٍ s

تصبح المعادلة : ص + ص² = ٤٢ ⇐ ص² + ص - ٤٢ = ٠

معادلة من الدرجة الثانية حلولها : ص = ٦ ، ص = - ٧

∴ ٍ ٍ s = 6 أو ٍ ٍ s = −7 ــ غير مقبول لماذا ؟ ــ



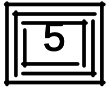
أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\sqrt[4]{s} = \frac{٢}{3 - \sqrt[4]{s}}$$

الحل :

مساعدة : فكر بالتعويض المناسب وينتهي الحل ؟

تأليف الأستاذ طارق الصيعري



أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\sqrt{س^2 + \sqrt{2س + 1}} = 2 - س$$

الحل :

فكر بتربيع الطرفين والتبسيط :

$س^2 + \left[\sqrt{2س + 1}\right] = س^2 - 4س + 4 \Leftarrow \left[\sqrt{2س + 1}\right] = -4س + 4$

بتربيع الطرفين مرة أخرى :

$\Leftarrow 2س + 1 = 16س^2 - 32س + 16$

$\Leftarrow 16س^2 - 34س + 15 = 0$

بالقانون العام : $أ = 16$ ، $ب = -34$ ، $ج = 15$

$\therefore س = \dfrac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أج}}{2أ}$ $\Leftarrow س = \dfrac{34 \pm \sqrt{1156 - 960}}{32}$

$\Leftarrow س = \dfrac{34 \pm \sqrt{196}}{32} = س = \dfrac{34 \pm 14}{32}$

$\therefore$ إما $س = \frac{3}{2}$ ـــ غير مقبول ـــ ، أو $س = \frac{5}{8}$

6

حل نظام المعادلات التالية :

$س^{2} + س\,ص + ص^{2} = ٨٤$ .... {١}

$س - \sqrt{س\,ص} + ص = ٦$ .... {٢}

الحل :

فائدة :

فكر في تبيع المعادلة الثانية ثم تعويض أحدهما في الآخر .

تأليف الأستاذ طارق الصيعري

بترتيب وتربيع المعادلة {٢} : س + ص - ٦ = [س|ص||| نجد أن :

س@ + ص@ + ٣٦ + ٢س ص - ١٢س - ١٢ص = س ص

نرتب الطرفين :

س@ + ص@ + س ص = ١٢س + ١٢ص ....{٣}

نعوض بقيمة الطرف الأيمن من : {١} في {٣} :

∴ ٨٤ = ١٢س + ١٢ص - ٣٦ ⇐ ١٢س + ١٢ص = ١٢٠

⇐ س + ص = ١٠

⇐ س = ١٠ - ص ....{٤}

بالتعويض من : {٤} في {١} نجد أن :

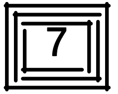
{ ١٠ - ص }@ + { ١٠ - ص } ص + ص@ = ٨٤

⇐ ١٠٠ + ص@ - ٢٠ص + ١٠ص - ص@ + ص@ = ٨٤

⇐ ص@ - ١٠ص + ١٦ = ٠ ⇐ { ص - ٢ }{ ص - ٨ } = ٠

⇐ ص = ٢ ، ص = ٨

بالتعويض في {٤} أيضاً نجد أن : س = ٨ ، س = ٢ .



اجعل المقدار :

$$\sqrt{11 - 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + \sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

على الصورة : $\sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$

فائدة : { حاول أن تجعل المقدار داخل الجذر الكبير مربع كامل ثم علاقة أبي كامل }

الحل :

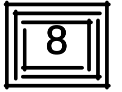
$$= \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + \sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

$$= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}\left(\sqrt{11 - 2\sqrt{29}}\right) + 11 - 2\sqrt{29}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}\left(\sqrt{11 - 2\sqrt{29}}\right) + \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{29}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left(\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{29}}\right)\right)^2}$$

$$= \left(\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{11 + 2\sqrt{29}}\right)$$



بسط المقدار التالي :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

الحل :

فكر في علاقة أبي كامل أو التربيع :

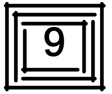
بتربيع الطرفين : $س^2 = \left(\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5 - 4}\right) \div \left(\sqrt{5} + 1\right)$

$= \left(2\sqrt{5} + 2\right) \div \left(\sqrt{5} + 1\right)$

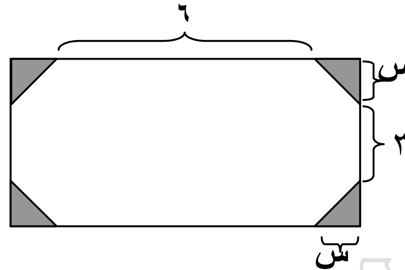
$= 2\left(\sqrt{5} + 1\right) \div \left(\sqrt{5} + 1\right)$

$= 2$

$س = \sqrt{2}$



إذا علمت أنّ المساحة غير المظلّلة في المستطيل أدناه تساوي ٦٢ سم@ ، فاحسب المساحة المظلّلة :



الحل :

بعدا المستطيل : ٢س + ٦ ، ٢س + ٣

مساحة المظلل الواحد = ½ س@ ⇐ مساحة المثلثات المظللة كلها = ٢س@ .

∴ مساحة المنطقة غير المظللة = مساحة المستطيل - مساحة المنطقة المظللة

⇐ ٦٢ = { ٢س + ٦ } { ٢س + ٣ } - ٢س@

⇐ ٦٢ = ٤س@ + ١٨س + ١٨ - ٢س@

⇐ ٢س@ + ١٨ س - ٤٤ = ٠

⇐ س@ + ٩ س - ٢٢ = ٠

⇐ { س - ٢ }{ س + ١١ } = ٠ ⇐ س = ٢ هي القيمة المقبولة .

∴ مساحة المنطقة المظللة = ٢س@ = ٢ × ٤ = ٨ .

10

أثبت أن :

$$\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{٢٢}$$

الحل :

حل بطريقتين ـ تربيع الطرفين وعلاقة أبي كامل المصري ـ

١ طريقة أبي كامل لجمع جذرين :

الطرف الأيمن $= \sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}$

$= \sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right) + \left(6-\sqrt{11}\right) + ٢\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)}}$

$= \sqrt{12 + ٢\sqrt{36 - 11}}$

$= \sqrt{12 + ٢\sqrt{25}}$

$= \sqrt{12 + ٢ \times 5}$

$= \sqrt{٢٢}$ = الطرف الأيسر

٢ بتربيع الطرفين :

$$\left(\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^{٢} = \left(\sqrt{٢٢}\right)^{٢}$$

$\therefore \left(6+\sqrt{11}\right) + \left(6-\sqrt{11}\right) + ٢ \times \left(\sqrt{6+\sqrt{11}} \times \sqrt{6-\sqrt{11}}\right) = ٢٢$

$\therefore 12 + ٢ \times \sqrt{36 - 11} = ٢٢$

$\therefore 12 + ٢ \times 5 = ٢٢$

$\therefore ٢٢ = ٢٢$ $\therefore$ الطرفان متساويان

11

نعرّف مقياس الفرق بين عددين: ن و م (|ن- م|) على أنه (ن- م) أو (م- ن) أيهما أكبر من أو يساوي صفرا. فعلى سبيل المثال: مقياس الفرق بين العددين ٢٤ و ٦٤ هو ٤٠. في المتتالية ٨٨، ٢٤، ٦٤، ٤٠، ٢٤، ... نحصل على بقية حدودها بحساب مقياس الفرق لكل عددين سابقين. أوجد مجموع أول ١٠٠ حد في هذه المتتالية.

الحل :

قاعدة المتتابعة : هي القيمة المطلقة للفرق بين العددين السابقين .

الحد الثالث = ' ٨٨ - ٢٤ ' = ٦٤

الحد الرابع = ' ٢٤ - ٦٤ ' = ' - ٤٠ ' = ٤٠

∴ المتتابعة = ٨٨ ، ٢٤ ، ٦٤ ، ٤٠ ، ٢٤ ، ١٦ ، ٨ ، ٨ ، ٠ ، ٨ ، ٨ ، ٠ ، ٨ ، .....

لاحظ بعد الحد السادس ستكون حدود المتتابعة على الصورة : ٨ ، ٨ ، ٠ ، ٨ ، ٨ ، ٠ ، ...

أي أن كل ثلاثة حدود ستكون على الصورة : ٨ ، ٨ ، ٠

∴ مجموع ١٠٠ حد = حاصل جمع الحدود الستة الأولى + ٣١ × { ٨ + ٨ + ٠ } + ٨

⇐ المجموع = ٨٨ + ٢٤ + ٦٤ + ٤٠ + ٢٤ + ١٦ + ٣١ × { ٨ + ٨ + ٠ } + ٨

= ٢٥٦ + ٤٩٦ + ٨ = ٢٥٦ + ٥٠٤ = ٧٦٠

12

علِّل لماذا لا نستطيع رسم مثلث م ب جـ بحيث أن ' ب جـ ' = ٤ سم ، و ' م جـ ' = ٩ سم والزاوية : مَ̂ = ٣٠° ؟

إرشاد : { استخدم : قاعدة الجيوب في الإثبات }

الحل :

نتذكر : في مثل هذه المسائل التي تحتوي على زويا وأضلاع متطابقات العلاقة بين المثلث وزواياه .

∴ من قاعدة الجيوب : $\frac{\text{أ}}{\text{جاأ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جاب}}$

Ü $\frac{4}{\text{جا}30} = \frac{9}{\text{جاب}}$ Ü $9\text{جا}30 = 4\text{جاب}$

Ü $9 ´ \frac{1}{٢} = 4\text{جاب}$

Ü $\text{جاب} = \frac{9}{8}$

ولكن : $\text{جاب} = \frac{9}{8} > 1$ وهذا مستحيل إذ أن قيمة 1- ³ جاب ³ 1

∴ مستحيل رسم المثلث لأن إحدى الزوايا غير حقيقية .

13

هل تعلم أن : ٤٢ × ٣٦ = ٢٤ × ٦٣ و ٣٢ × ٤٦ = ٢٣ × ٦٤ ؟ ما هو الشرط اللازم والكافي لكي يكون حاصل ضرب عددين كل منهما مكون من خانتين هو نفسه إذا تم تبديل آحاد وعشرات كل منها بالأخرى كما في المثالين أعلاه ؟

إرشاد : { اجعل العدد عل صورة آحاد + عشرات على الصورة : {م+١٠ب} } اجري العمليات الحسابية والاختصارات ثم لخص الشرط .

الحل :

لاحظ يمكن كتابة العددين على الصورة : { م + ١٠ب } ، { جـ + ١٠د } .

١ (أ + 10ب) ´ ([+ 10}) = (ب + 10أ) ´ (} + 10[ )

Ü أ[+ 10أ} + 10ب[+ 100ب} = ب} + 10ب[+ 10أ} + 100أ[

Ü 100ب} - ب} = 100أ[- أ[

Ü 99ب} = 99أ[

Ü ب} = أ[

الآن : يمكن تلخيص الشرط كالتالي :

إذا كان آحاد الأول × آحاد الثاني = عشرات الأول في عشرات الثاني .

14

حل المعادلة التالية :

$$م^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = (16)^{س}$$

الحل :

الطرف الأيمن $= م^{1994} + (م^{2})^{997} + (م^{3})^{665}$

$= م^{1994} + م^{1994} + م^{1995}$

$= م^{1994} + م^{1994} + م^{1994} \times م$

$= 4 \times م^{1994}$

$= م^{2} \times م^{1994} = م^{1996}$

الطرف الأيسر $= (16)^{س} = (م^{4})^{س} = م^{4س}$

$\because$ إذا تساوت الأساسات تتساوى الأسس

$\Leftarrow$ $م^{1996} = م^{4س}$ $\Leftarrow$ $4س = 1996$

$\Leftarrow$ $س = 499$

15

أوجد قيم : س التي تجعل المقدار :

$$\frac{s+3}{s-1}$$ **عدداً صحيحاً .**

إرشاد : { حاول أن تجعل البسط مقدار ثابت والمقام مجهول }

الحل :

$$\frac{s+3}{s-1} = \frac{s-1+1+3}{s-1} = \frac{s-1+4}{s-1} = \frac{s-1}{s-1} + \frac{4}{s-1} = 1 + \frac{4}{s-1}$$

الآن :

حتى يكون المقدار عدداً صحيحاً يجب أن يكون المقام قاسم من قواسم البسط .

∴ قواسم البسط هي : ± ١ ، ± ٢ ، ± ٤

∴ نساوي المقام : س - ١ بقواسم البسط ونستنتج قيم س .

س - ١ = + ١ ⇐ س = ٢ أو س - ١ = - ١ ⇐ س = ٠

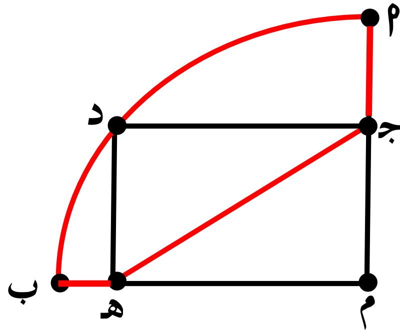
س - ١ = + ٢ ⇐ س = ٣ أو س - ١ = - ٢ ⇐ س = - ١

س - ١ = + ٤ ⇐ س = ٥ أو س - ١ = - ٤ ⇐ س = - ٣

∴ قيم س هي : { ٠ ، - ١ ، - ٣ ، ٢ ، ٣ ، ٥ }

16

في الشكل أدناه: ؟ ب هو ربع دائرة مركزها م ، ونصف قطرها ١٠ سم. أما م جـ د هـ فهو مستطيل محيطه ٢٦ سم. أوجد محيط الشكل ؟ ب جـ هـ .



إرشاد : { قد تحتاج لقانون طول القوس }

{ ل = نوهـ ، نو : نصف القطر ، هـ : قياس الزاوية المركزية بالراديان }

الحل :

محيط الشكل = | ؟ب⌒ | + ' هـ جـ ' + ' جـ ؟ ' + ' هـ ب '

طول القوس = ¼ ط نو = ¼ ط × ١٠ = ٥ط سم ....{ ١ }

∵ محيط المستطيل = ٢٦ ⇐ ' جـ م ' + ' م هـ ' = ١٣ سم

∴ ' ؟ جـ ' + ' هـ ب ' = ٢٠ - ١٣ = ٧ سم ....{ ٢ }

' جـ هـ ' = ' م هـ ' ... أقطار في المستطيل ⇐ ' جـ هـ ' = ١٠ ....{ ٣ }

من : { ١ } و { ٢ } و { ٣ } نجد أن :

محيط الشكل = ٥ط + ١٧ سم

17

حلل العبارة التالية إلى عاملين :

١) $س^4 + ٤ص^4$ ٢) $س^8 + ١٦$

إرشاد : (فكر في صورة مربع كامل ثم فكر في متطابقة الفرق بين مربعين)

الحل :

١) $س^4 + ٤ص^4$

$س^4 + ٤ص^4 + ٤س^2ص^2 - ٤س^2ص^2$ ــ نكمل مربع للمقدار ــ

$\Leftarrow (س^2 + ٢ص^2)^2 - ٤س^2ص^2$ ــ الآن متطابقة فرق بين مربعين ــ

$\Leftarrow (س^2 + ٢ص^2)^2 - (٢س ص)^2$

$\Leftarrow (س^2 + ٢ص^2 + ٢س ص)(س^2 + ٢ص^2 - ٢س ص)$

٢) $س^8 + ١٦$

$س^8 + ٨س^4 + ٤^2 - ٨س^4 \Leftarrow (س^4 + ٤)^2 - ٨س^4$

$\Leftarrow (س^4 + ٤)^2 - (\sqrt{٨}\, س^2)^2$

$\Leftarrow (س^4 + ٤ + \sqrt{٨}\, س^2)(س^4 + ٤ - \sqrt{٨}\, س^2)$

18

حل المعادلة : جتا(s) + 1 = جا(s) ، في الفترة : [٠ ، ٢ط)

الحل :

بتربيع الطرفين :

(جتا(s) + 1)٢ = جا٢(s)

Ü جتا٢(s) + ٢جتا(s) + 1 = جا٢(s)

Ü جتا٢(s) + ٢جتا(s) + 1 = 1 - جتا٢(s)

Ü ٢جتا٢(s) + ٢جتا(s) + 1 = 1

Ü ٢جتا٢(s) + ٢جتا(s) = 0

Ü جتا٢(s) + جتا(s) = 0

Ü جتا(s)(جتا(s) + 1) = 0

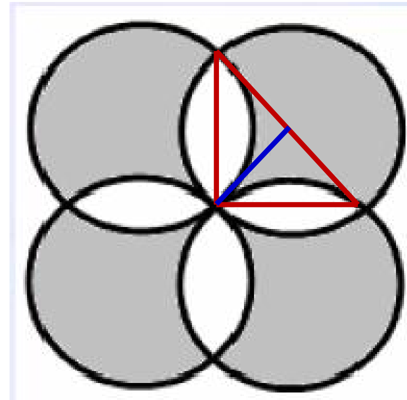
∴ إما جتاس = ٠ ⇐ س = ' / ٢ ــ مقبولة وتحقق المعادلة ــ

⇐ س = '3 / ٢ ــ غير مقبولة ولا تحقق المعادلة ــ

أو جتاس + ١ = ٠ ⇐ جتاس = - ١ ⇐ س = ط

∴ مجموعة الحل : { ' / ٢ ، ط ‘

19



على الشكل المقابل أربع دوائر متطابق نصف قطر كل منها = ٢ ، احسب مساحة الشكل المظلل .

إرشاد : { لعلك تستفيد من قانون مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نو@ × هـ ، هـ : بالتقدير الدائري }

الحل :

قانون مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نو@ { د - جاد }

د : قياس الزاوية بالراديان .

في دائرة واحدة أربع قطع دائرية .

م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ × { $\frac{ط}{٢}$ - ١ } = ط - ٢

مساحة القطع في الدائرية = ٤ ط - ٨

مساحة الدائرة = ٤ ط

مساحة المنطقة المظللة في الدائرة = مساحة الدائرة - مساحة القطع الدائرية

= ٤ط - ٤ط + ٨ = ٨

مساحة المنطقة المظللة جميعها = ٣٢ .

20

أوجد قيمة المقدار :

$$\frac{1}{٢} + \frac{٢}{٢^{٢}} + \frac{٢^{٢}}{٢^{3}} + \frac{٢^{3}}{٢^{4}} + \cdots\cdots + \frac{٢^{1427}}{٢^{1428}} + \frac{٢^{1428}}{٢^{1429}} + \frac{٢^{1429}}{٢^{1430}}$$

الحل :

بالاختصار بين البسط والمقام في المقدار سنجد أن المقدار =

$$\frac{1}{٢} + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٢} + \cdots\cdots + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٢} + \frac{1}{٢}$$

وهو عبارة عن حاصل جمع : $\frac{1}{٢}$ مكررة ١٤٣٠ مرة = $\frac{1}{٢}$ × ١٤٣٠ = ٧١٥ .

21

ليكن : د : ص ⟵ ص **تطبيقاً من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى نفسها يحقق :**

د { س } - س د{ د { س } - س } = - س = ٢٠٠٠ ، **لكل :** س ∈ ص

أوجد : د { ١ } .

إرشاد : { فكر بالتعويض بقيم مناسبة ثم يتحول المقدار إلى نظام معادلتين }

الحل :

بالتعويض عند : س = ١ نجد أن :

د { ١ } - د { د { ١ } - ١ } - ١ = ٢٠٠٠

⟸ د { ١ } - د { د { ١ } - ١ } = ٢٠٠١ .... { ١ }

بالتعويض عند : س = - ١ نجد أن :

د { د { - ١ } + ١ } + د { ١ } + ١ = ٢٠٠٠

⟸ د { ١ } + د { د { ١ } - ١ } = ١٩٩٩ .... { ٢ }

بجمع : { ١ } + { ٢ } نجد أن :

٢ × د { ١ } = ٤٠٠٠ ⟸ د { ١ } = ٢٠٠٠ .

22

إذا كان : [٢م |-| ١ | ، [٢م |+| ١ | ، ٢ [م ، أضلاع مثلث فكم يساوي قياس الزاوية الكبرى .

الحل :

بتربيع المقادير الثلاثة سنجد أن أحدهما = حاصل جمع الآخرين

وبالتالي : الأضلاع تمثل أضلاع مثلث قائم الزاوية والزاوية الكبرى = ٩٠° .

23

إذا كان : ع عدد مركب الجزء التخيلي له = ١٦٤ ، وكان : ν عدد حقيقي موجب حيث :

$\frac{ع}{ع + k} = j4$ ، **أوجد قيمة : ν .**

إرشاد : اجعل العدد المركب على الصورة : s + w j ثم طرفين في وسطين .

الحل :

نجعل العدد المركب على الصورة العامة : s + w j ⇐ u = s + 164j

$\frac{ع}{ع + k} = j4$ Ü $\frac{s + 164j}{k + 164j + s} = j4$

Ü s + 164j = s4 j + 656j ٢ + k4 j

Ü s + 164j = s4 j - 656 + k4 j

Ü s + 164j = - 656 + (s4 + k4) j

بمساواة الطرفين سنجد أن الجزء الحقيقي : س = - ٦٥٦

بمساواة الجزء التخيلي سنجد أن :

٤س + ٤ν = ١٦٤ ⇐ ٤ × - ٦٥٦ + ٤ν = ١٦٤

⇐ ٤ν = ١٦٤ + ٤ × ٦٥٦

⇐ ν = ٤١ + ٦٥٦ ⇐ ν = ٦٩٧

24

لاحظ أن : $\frac{25}{6} = \frac{5}{3} + \frac{5}{٢} = \frac{5}{3} \times \frac{5}{٢}$

أوجد قاعدة رياضية للأعداد الكسرية حتى يكون حاصل ضرب العددين مساوياً لمجموعهما.

الحل :

نفرض الأعداد على الصورة : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{[}{]}$ $= \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{[}{]}$

∴ بالضرب وتوحيد المقامات نجد أن : $\frac{[\text{أ}}{]\text{ب}} = \frac{\text{ب}[+]\text{أ}}{]\text{ب}}$

∵ المقامات متساوي ⇐ نساوي البسط ⇐ م ج = م ء + ج ب

∴ بالقسمة على : م ج نجد أن : $\frac{]}{[} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = 1$

∴ الشرط : حاصل جمع مقلوب الكسرين = ١

25

إذا كان : ظاأ + ظاب = 4 ، ظتاأ + ظتاب = 5 ، **احسب :** ظا(أ + ب)

الحل :

فكرة الحل تطبيق مباشر لخصائص الدوال المثلثية .

$$\text{ظتاأ} + \text{ظتاب} = \frac{1}{\text{ظاأ}} + \frac{1}{\text{ظاب}} = \frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{\text{ظاأظاب}}$$

$$\frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{\text{ظاأظاب}} = 5 \Leftarrow \frac{4}{\text{ظاأظاب}} = 5 \Leftarrow \text{ظاأظاب} = \frac{4}{5}$$

الآن :

من متطابقة مجموع زاويتين لـــــ ظا(أ + ب) نجد أن :

$$\text{ظا(أ + ب)} = \frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{1 - \text{ظاأ} \times \text{ظاب}}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20$$

١ ظا(أ + ب) = 20

26

أثبت أن : جا ٣ i = 3جا i - 4جا^{3} i

إرشاد : { ابدأ بالطرف الأيمن واستفد من متطابقة مجموع زاويتين ثم المتطابقة الأساسية }

الحل :

جا ٣ i = جا(i + ٢ i)

= جا(i)جتا(٢ i) + جتا(i)جا(٢ i)

= جا(i)[جتا^{٢}(i) - جا^{٢}(i)] + جتا(i).٢جا(i)جتا(i)

= جا(i)جتا^{٢}(i) - جا^{3}(i) + ٢جا(i)جتا^{٢}(i)

= ٣جا(i)جتا^{٢}(i) - جا^{3}(i)

= ٣جا(i)[1 - جا^{٢}(i)] - جا^{3}(i)

= ٣جا(i) - ٣جا^{3}(i) - جا^{3}(i)

= ٣جا(i) - ٤جا^{3}(i)

27

ك مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة. وليكن : د : ك ← ك التطبيق المعرف بالقاعدة :

د (س) = مجموع أرقام العدد س .

هل د متباين ؟ هل د شامل ؟ برر إجابتك .

إرشاد :

{ أثبت أنه غير متباين بإعطاء مثال ثم لاحظ أن كل عدد عبارة عن مجموع الواحد مكرر ن مرة }

الحل :

∵ د { ١ } = ١ ، د { ١٠ } = ١ ⇐ التطبيق ليس تبايناً لأنه يوجد عنصر في المجال المقابل صورة لعنصرين من المجال .

الآن :

نثبت أن التطبيق شامل .

نفرض : أ ∈ ك { المجال } ، ب ∈ ك { المجال المقابل }

لاحظ أن كل عدد في المجال المقابل عبارة عن مجموع الواحد مكرر ب مرة .

فمثلاً :

٣٤ ∈ ك { المجال المقابل } وهي عبارة عن مجموع خانات العدد : ١١١ ...١١ مكرر ٣٤ مرة الذي ينتمي للمجال .

أ = ١١١....١١١١ مكررة ب من المرات

∴ د { أ } = ب لكل : أ ، ب ∈ ك .

∴ التطبيق شامل .

28

كانت : $د(س) = لو_٢(جا\,س) + لو_٢(جتا\,س) + لو_٢(جتا\,٢س) + لو_٢(جتا\,4س)$

احسب : $د\left(\frac{\pi}{48}\right)$

إرشاد : { استفد من خصائص ضعف الزاوي للـــــ جا }

الحل :

$$د(س) = لو_٢(جا\,س) + لو_٢(جتا\,س) + لو_٢(جتا\,٢س) + لو_٢(جتا\,4س)$$

$$= لو_٢(جا\,س\,جتا\,س) + لو_٢(جتا\,٢س) + لو_٢(جتا\,4س)$$

$$= لو_٢\left(\frac{1}{٢}جا\,٢س\right) + لو_٢(جتا\,٢س) + لو_٢(جتا\,4س)$$

$$= لو_٢\left(\frac{1}{4}جا\,4س\right) + لو_٢(جتا\,4س)$$

$$= لو_٢\left(\frac{1}{8}جا\,8س\right)$$

$$د\left(\frac{\pi}{48}\right) = لو_٢\left(\frac{1}{8}جا\,8 \times \frac{\pi}{48}\right)$$

$$= لو_٢\left(\frac{1}{8}جا\frac{\pi}{6}\right) = لو_٢\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{٢}\right)$$

$$= لو_٢(٢^{-4}) = -4$$

29

إذا كان : أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقيةً تحقق :

$$\text{أ} + \frac{1}{\text{ب}} = 1 \quad ، \quad \text{ب} + \frac{1}{\text{جـ}} = 1$$

أوجد القيمة العددية للمقدار : أ × ب × جـ

الحل :

$$\text{أ} + \frac{1}{\text{ب}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{أب} + 1}{\text{ب}} = 1 \Leftarrow \text{أب} + 1 = \text{ب} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\text{ب} + \frac{1}{\text{جـ}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{ب جـ} + 1}{\text{جـ}} = 1 \Leftarrow \text{ب جـ} + 1 = \text{جـ} \quad \cdots\cdots (٢)$$

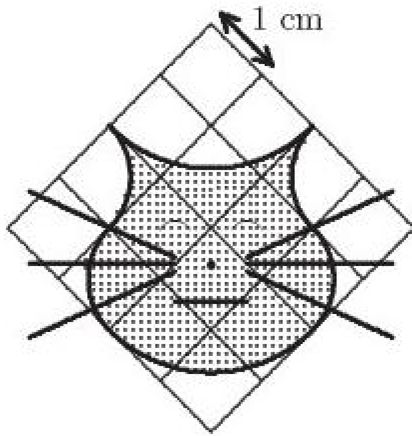
بالتعويض من (1) بقيمة : ب في (٢) نجد أن :

$$(\text{أب} + 1)\,\text{جـ} + 1 = \text{جـ} \Leftarrow \text{أب جـ} + \text{جـ} + 1 = \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{أب جـ} + 1 = 0$$

$$\Leftarrow \text{أب جـ} = -1$$

30



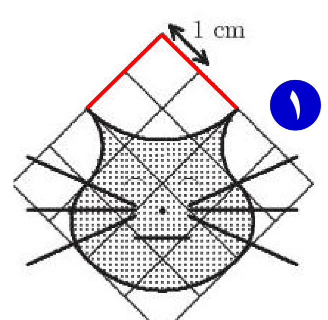
في الشكل التالي أوجد مساحة الجزء المظلل

{ وجه القط } علماً أن محيط الوجه يتكون

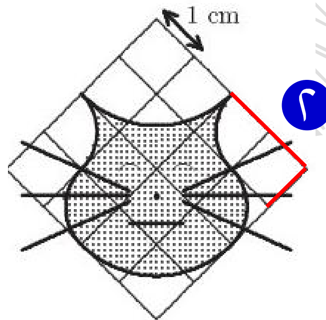
من ستة أرباع دوائر كما هي موضحة في الشكل :

الحل :

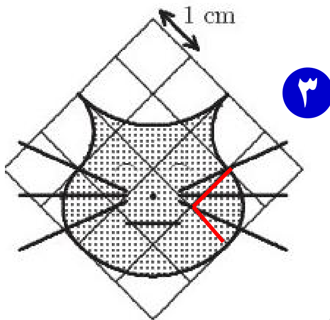
١



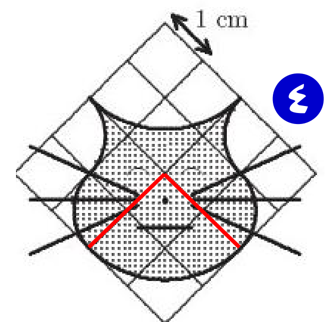
٢



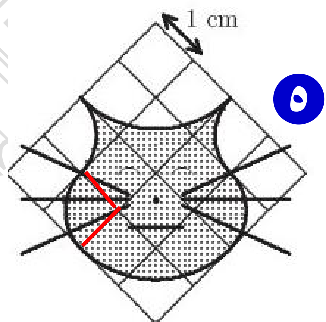
٣



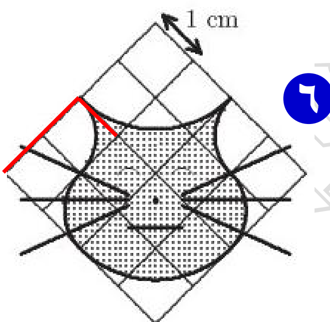
٤



٥



٦



المساحات كقطاعات دائرية ومربعات على الترتيب للأجزء غير المظللة :

= ط + { ١ + ١/٤ ط } + { ١ - ١/٤ ط } + { ٤ - ط } + { ١ - ١/٤ ط } + { ١ + ١/٤ ط } = ٨

∴ مساحة رأس القط = مساحة المربع - مساحة الجزء غير المظلل

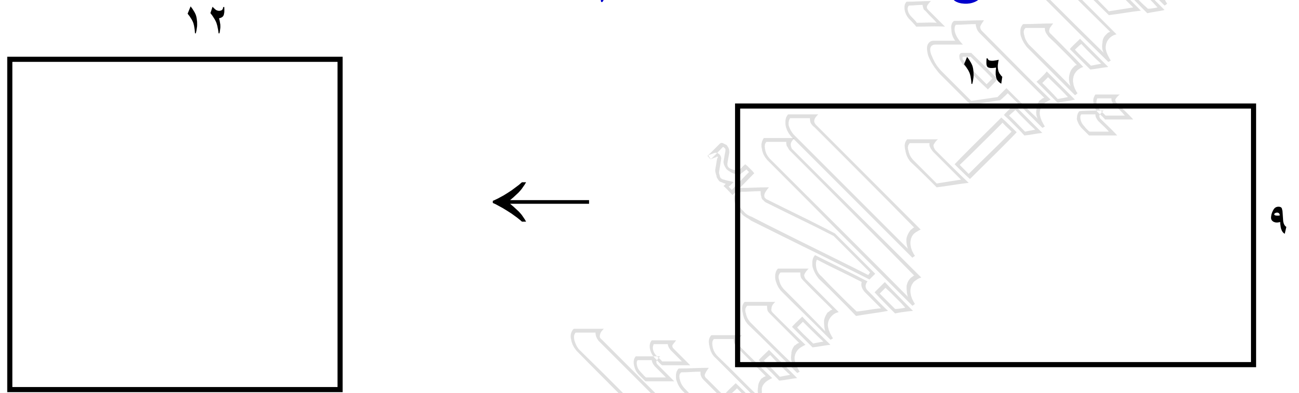
= ١٦ - ٨ = ٨سم@

31

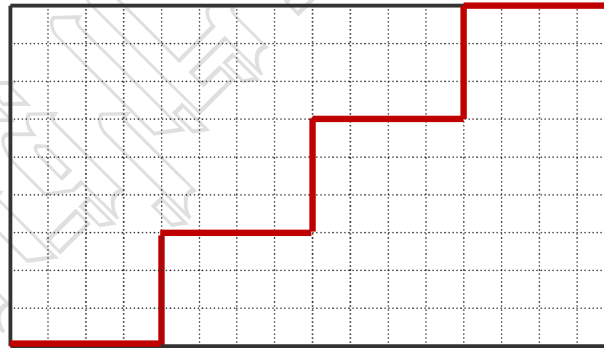
لديك منشار ، ولوح خشبي على شكل مستطيل أبعاده : ٩سم ، ١٦سم .

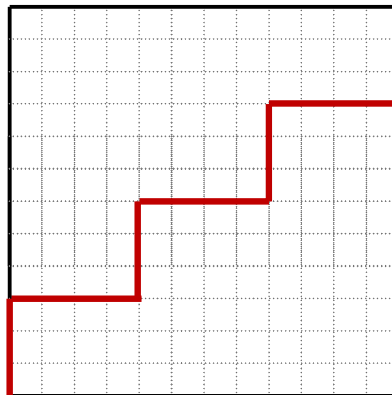
كيف يمكنك تجزئة اللوح إلى قطعتين بحيث يمكن إعادة تركيبهما

لتحصل على مربع طول ضلعه : ١٢سم .



الحل :





32

لتكن (س ، ✳) زمرة وليكن ٩ ، ب ∈ س حيث : $ب^{٨} = م$ و ٩ ✳ ب = ب$ ✳ ٩ .

أثبت أن : ١ ب# = م   ٢ ٩ ✳ ب = ب ✳ ٩

إرشاد : استخدم الحقيقة : $(ɉ * f *^{1-}ɉ)^{k} = ɉ * f^{k} *^{1-}ɉ$

لكل : ٩ ، ب ∈ س ، ولكل عدد صحيح موجب ٨ :

الحل :

١

∵ $ɉ * f = f^{4} * ɉ$ Ü $f = ɉ^{1-} * f^{4} * ɉ$

Ü $f^{3} = (ɉ^{1-} * f^{4} * ɉ)^{3}$

Ü $f^{3} = ɉ^{1-} * f^{12} * ɉ$

Ü $f^{3} = ɉ^{1-} * (f^{6})^{٢} * ɉ$

Ü $f^{3} = ɉ^{1-} * I^{٢} * ɉ$

ولكن : $ب^{٨} = م$ ∴ Ü $f^{3} = ɉ^{1-} * I * ɉ$

Ü $f^{3} = ɉ^{1-} * ɉ$

Ü $f^{3} = I$

٢

∵ $ɉ * f = f^{4} * ɉ$ Ü $ɉ * f = f^{3} * ب * ɉ = I * ب * ɉ = ب * ɉ$

33

إذا كان كلّ من ك و م عدداً أوّلياً و كان : ك م = ٢٠٤٧ و (ك - ١)(م - ١) = ١٩٣٦

فأوجد كلاً من ك و م .

الحل :

ك م = ٢٠٤٧ .... { ١ }

(ك - ١)(م - ١) = ١٩٣٦ .... { ٢ }

من { ٢ } نجد أن :

(ك - ١)(م - ١) = ١٩٣٦ ⇐ ك م - { ك + م } + ١ = ١٩٣٦

بالتعويض بقيمة : ك م من { ١ } نجد أن :

⇐ ٢٠٤٧ - { ك + م } + ١ = ١٩٣٦

⇐ { ك + م } = ٢٠٤٨ - ١٩٣٦

⇐ ك + م = ١١٢

⇐ م = ١١٢ - ك .... { ٣ }

بالتعويض بقيمة : م في { ١ } نجد أن :

ك { ١١٢ - ك } = ٢٠٤٧ ⇐ ١١٢ك - ك@ = ٢٠٤٧

⇐ ك@ - ١١٢ك + ٢٠٤٧ = ٠

⇐ { ك - ٢٣ } { ك - ٨٩ } = ٠

∴ إما ك = ٢٣ ⇐ م = ٨٩ أو ك = ٨٩ ⇐ م = ٢٣ .

34

أوجد قيم ب الصحيحة التي تجعل للمعادلة التالية :

١ + ب جــتا س = { ب + ١ }^{2} ، حيث : ب ≠ صفر .

حلاً في ح .

الحل :

∵ ١ + ب جــتا س = { ب + ١ }^{2}

⇐ ١ + ب جــتا س = ب^2 + ٢ ب + ١

⇐ ب جــتا س = ب^2 + ٢ ب

⇐ ب جــتا س = ب { ب + ٢ }

⇐ جــتا س = ب + ٢

الآن : ∵ ب ∈ ص و ب ≠ صفر

كذلك : ∵ - ١ ≤ جــتا س ≤ ١

⇐ لا توجد قيم لــ ب سوى : - ١ ، - ٢ ، - ٣

تأليف الأستاذ طارق الصيعري

35

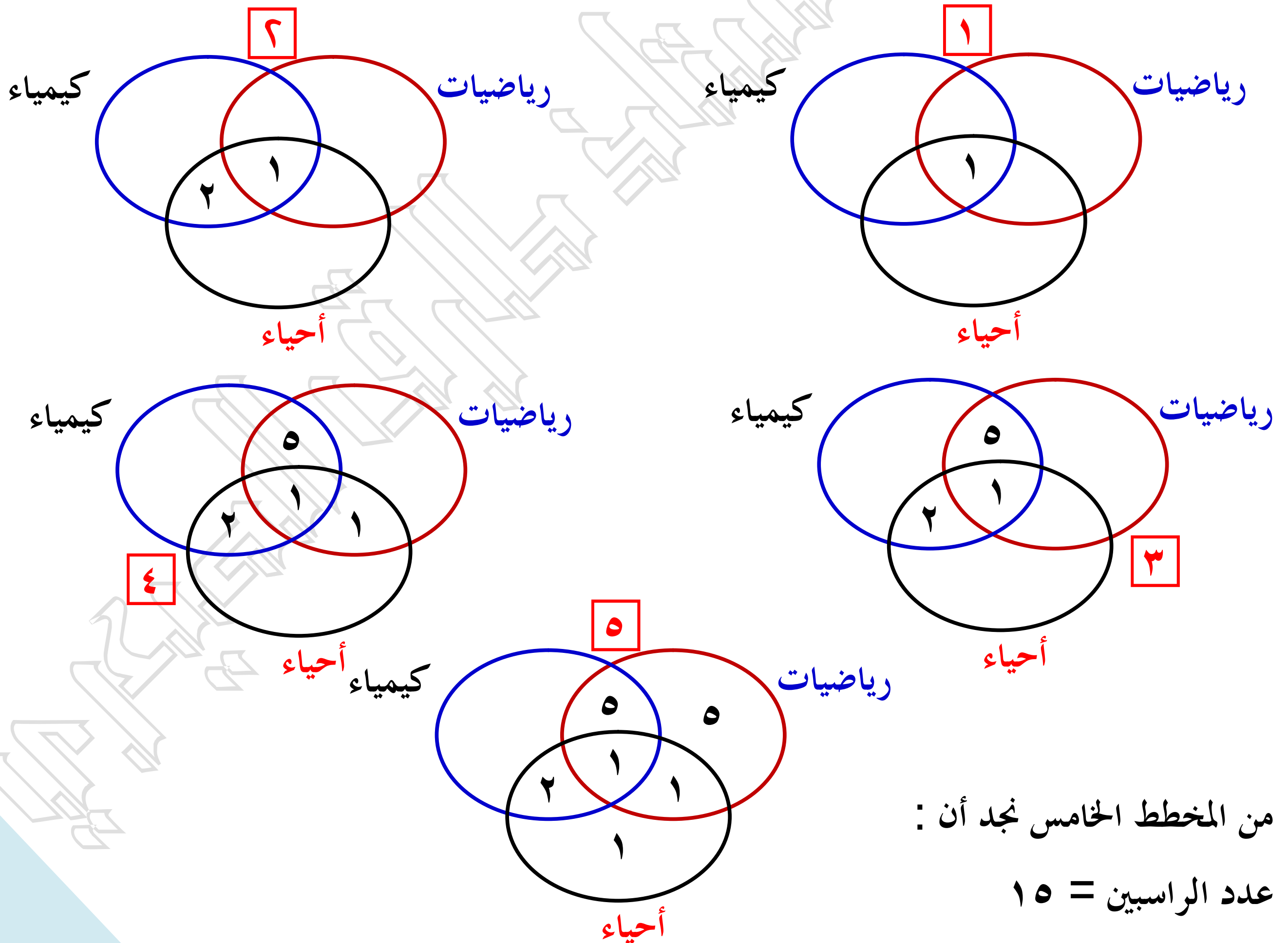
جلس طلاب الصف الثاني ثانوي وعددهم ٤١ طالباً لتقديم اختبارات نهاية العام في مواد الرياضيات (ر)، الأحياء (ح) والكيمياء (ك) وكانت النتائج مبينة في الجدول التالي:

المادة	ر	ح	ك	ر ، ح	ر ، ك	ح ، ك	ر، ح، ك
عدد الطلاب الراسبين	١٢	٥	٨	٢	٦	٣	١

احسب عدد الطلاب الذين اجتازوا المواد الثلاث .

الحل :

نستخدم مخطط فــن لتحديد التقاطع بين المجموعات الثلاث :



من المخطط الخامس نجد أن :

عدد الراسبين = ١٥

∴ عدد الناجحين = ٤١ - ١٥ = ٢٦ .

36

مبلغ من المال مكون من ٤٠ ورقة نقدية من الفئات: ريال واحد، ١٠ ريالات، ١٠٠ ريال. هل يمكن لهذا المبلغ أن يكون ٣٥٠ ريالاً ؟ علل إجابتك .

الحل :

نفرض فئة ريال عددها = س

نفرض فئة : ١٠ ريال عددها = ص

نفرض فئة : ١٠٠ ريال عددها = ع

∴ س + ص + ع = ٤٠ .... { ١ }

س + ١٠ص + ١٠٠ع = ٣٥٠ .... { ٢ }

من { ١ } نجد أن :

س = ٤٠ - { ص + ع } .... { ٣ }

بالتعويض من : { ٣ } في { ٢ } نجد أن :

٤٠ - ص - ع + ١٠ص + ١٠٠ع = ٣٥٠

⇐ ٩ص + ٩٩ع = ٣١٠

⇐ ٩ { ص + ١١ع } = ٣١٠

∴ يجب أن تكون ٩ عامل من عوامل ٣١٠ ولكن هذا غير صحيح .

∴ لا يمكن أن يكون هذا المبلغ ٣٥٠ .

37

بين نوع العدد نسبي أو غير نسبي :

$$\frac{\sqrt{9-4\sqrt{5}}+1}{\sqrt{5}-1}$$

الحل :

من علاقة أبي كامل المصري :

$$\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\{\text{أ}+\text{ب}\} - 2\sqrt{\text{أ}\times\text{ب}}}$$

نجد أن :

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{9-2\sqrt{20}}$$

$$\Leftarrow \sqrt{9-2\sqrt{20}} = \sqrt{5+4-2\sqrt{5\times4}}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{4}$$

$$= \sqrt{5} - 2$$

الآن : بالتعويض في الكسر نجد أن قيمة الكسر = ١

⇐ الكسر عدد نسبي .

38

إذا كان م ≠ ٠ جذر للمعادلة : $س^{4} + س^{2} - ١ = ٠$

أوجد قيمة : $م^{6} + ٢م^{4}$

الحل :

∵ م جذر للمعادلة

⇐ $م^{4} + م^{2} - ١ = ٠$ ⇐ $م^{4} + م^{2} = ١$ ⇐ $م^{2} = ١ - م^{4}$

⇐ $\{م^{4} + م^{2}\}^{2} = ١$

⇐ $م^{8} + م^{4} + ٢م^{6} = ١$

⇐ $م^{8} + ٢م^{6} = ١ - م^{4}$

⇐ $م^{8} + ٢م^{6} = م^{2}$

⇐ $م^{6} + ٢م^{4} = ١$

وهو المطلوب ،،،

39

تصدق محسن بمبلغ من المال على مدى عشرة أيام. في اليوم الأول تصدق بنصف المبلغ ونصف ريال، وفي اليوم الثاني تصدق بنصف ما بقي من المبلغ ونصف ريال؛ وفي الأيام الثمانية الأخرى تصدق بالطريقة نفسها. في نهاية اليوم العاشر وجد أنه قد تصدق بالمبلغ كله . ما المبلغ الذي تصدق به المحسن ؟

الحل :

المبلغ في اليوم الأخير = ١ ريال لأنه في اليوم العاشر سوف يتصدق بنصف المبلغ + نصف ريال وينتهي المبلغ .

∵ أنه سوف يتصدق بنصف المبلغ المتبقي ونصف ريال .

∴ نفرض المبلغ في أي يوم = ص وفي اليوم التالي = س .

∴ ص - { ½ ص + ½ } = س ⇐ ½ ص - ½ = س ⇐ ص = ٢س + ١

الآن :

∵ المبلغ في بداية اليوم العاشر = ١ ⇐ اليوم التاسع = ص = ٢ × ١ + ١ = ٣

بالمثل سنجد أن :

اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
المتبقي	١٠٢٣	٥١١	٢٥٥	١٢٧	٦٣	٣١	١٥	٧	٣	١

∴ المبلغ المتصدق به = ١٠٢٣ ريال .

40

حل المتباينة التالية في ح :

س$~ + ٣ س@~ - ٤ < ٠ ، حيث : ~ عدداً طبيعياً .

الحل :

∵ س$~ + ٣ س@~ - ٤ < ٠

⇐ { س@~ + ٤ } { س@~ - ١ } < ٠

⇐ س@~ - ١ < ٠ لاحظ أن : س@~ + ٤ مستحيل تكون أصغر من صفر

⇐ س@~ < ١

⇐ ' س ' < ١ من خصائص المتباينات

⇐ – ١ < س < ١

⇐ س ∈ } - ١ ، ١ {

41

إذا كان : $7^{s} = 256$ ، $16^{w} = 49$ ، **أوجد قيمة :**

$$4^{ws+1}$$

الحل :

لاحظ أن : $16^{w} = 49 \Leftarrow (4^{2})^{w} = 49 \Leftarrow (4^{w})^{2} = 49 \Leftarrow 4^{w} = 7$

$$4^{ws+1} = 4 \times 4^{ws} = 4 \times (4^{w})^{s}$$
$$= 4 \times 7^{s}$$
$$= 4 \times 256$$
$$= 1024$$

طريقة أخرى :

بأخذ لوغاريتم الطرفين لكل حد نجد أن :

s لو7 = لو256 ……(1) ، w لو16 = لو49 ……(٢)

بضرب : { ١ } × { ٢ } نجد أن :

(s لو7)(w لو16) = (لو256)(لو49)

⇐ (s لو7)(w لو16) = (لو(16)^{2})(لو(7)^{2})

⇐ ws(لو7)(لو16) = ٢لو(16) × ٢لو(7)

⇐ ws(لو7)(لو16) = ٤(لو16)(لو7)

$\therefore$ ws = 4

$\Leftarrow 4^{ws+1} = 4^{4+1} = 4^{5} = 1024$

42

إذا كان : جا i + جتا i = $\frac{1}{5}$ ، ٠ ⩽ هـ ⩽ ١٨٠°

أوجد قيمة : ظا i

الحل :

بتربيع الطرفين نجد أن : ١ + جا٢ i = $\frac{1}{25}$

Ü جا٢ i = $\frac{1}{25}$ - 1 Ü جا٢ i = - $\frac{24}{25}$ ....(1)

من المتطابقة الأساسية الأولى سنجد أن : Ü جتا٢ i = $\frac{7}{25}$ ......(٢)

من : { ١ } ، { ٢ } نجد أن : ظا٢ i = - $\frac{24}{7}$

من متطابقة ضعف الزاوية لـــ ظا٢ i نجد أن : ظا٢ i = $\frac{\text{٢ظا i}}{\text{1 - ظا}^{٢}\text{ i}}$

تذكر : إشارة ظـــا٢هـ السالبة تعني أن : هـ تقع في الربع الثاني فيمكن تجاهل الإشارة .

بالتعويض بقيمة : ظا٢ i = $\frac{24}{7}$ في متطابقة الضعف ، نجد أن :

$\frac{24}{7}$ = $\frac{\text{٢ظا i}}{\text{1 - ظا}^{٢}\text{ i}}$ Ü ١٤ظا i = 24 - 24ظا^{٢} i

Ü ٢٤ظا^{٢} i + ١٤ظا i - 24 = 0

بحل المعادلة من الدرجة الثانية نجد أن :

إما : ظا i = $\frac{3}{4}$ أو ظا i = - $\frac{4}{3}$

وبتمثيلها في مثلث قائم الزاوية سنجد أن القيمة التي تحقق المعطيات هي : ظا i = - $\frac{4}{3}$

∴ ظا i = - $\frac{4}{3}$ ، جا i = $\frac{4}{5}$ ، جتا i = - $\frac{3}{5}$ لأن : هـ تقع في الربع الثاني

43

$$ {}^{24}(j+1) - {}^{24}(j-1) $$ ضع المقدار في أبسط صورة :

الحل :

لاحظ :

$$ (1) \cdots\cdots\cdots \quad j\,\text{٢}- = j\,\text{٢} - {}^{\text{٢}}j + 1 = {}^{\text{٢}}(j-1) $$

$$ (\text{٢}) \cdots\cdots\cdots \quad j\,\text{٢} = j\,\text{٢} - {}^{\text{٢}}j + 1 = {}^{\text{٢}}(j+1) $$

$$ (3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1 = {}^{12}j = {}^{8}j = {}^{4}j $$

الآن :

من : { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } نجد أن :

$$ {}^{12}\left[{}^{2}(j+1)\right] - {}^{12}\left[{}^{2}(j-1)\right] = {}^{24}(j+1) - {}^{24}(j-1) $$

$$ {}^{12}[j\,\text{٢}] - {}^{12}[j\,\text{٢}-] = $$

$$ \left[{}^{12}j \times {}^{12}\text{٢}\right] - \left[{}^{12}j \times {}^{12}(\text{٢}-)\right] = $$

$$ 0 = \left[1 \times {}^{12}\text{٢}\right] - \left[1 \times {}^{12}\text{٢}\right] = $$

44

إذا كانت : $v \square p \leftarrow p$ **وكانت :**

$v(s) + ٢v\left(\frac{1}{s}\right) = 3s$ ، **حيث :** $s \ni p^{*}$

أوجد جميع قيم s **التي تحقق :** $v(s) = v(-s)$

تلميح : عوض عن : s مرة بـ s ، ومرة بـ $\frac{1}{s}$.

الحل :

$$v(s) + ٢v\left(\frac{1}{s}\right) = 3s \cdots\cdots\cdots (1)$$

بالتعويض عن : s ، بـ $\frac{1}{s}$ نجد أن : $v\left(\frac{1}{s}\right) + ٢v(s) = \frac{3}{s}$

بالضرب في : - ٢ ثم ترتيب المعادلة ستصبح :

$$-4v(s) - ٢v\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{6}{s} \cdots\cdots\cdots (٢)$$

بجمع المعادلة : { ١ } + { ٢ } نجد أن : $-3v(s) = 3s - \frac{6}{s}$

بضرب المعادلة في : $-\frac{1}{3}$ نجد أن : $v(s) = \frac{٢}{s} - s \cdots\cdots\cdots (3)$

وهي الدالة التي تحقق المعطيات .

الآن :

لايجاد القيم التي عندها : $v(s) = v(-s)$

نعوض في المعادلة : { ٣ } بـــ - س نجد : $v(-s) = s - \frac{٢}{s}$ ……… (4)

بمساواة المعادلتين : { ٣ } ، و { ٤ } نجد أن :

$$\frac{٢}{s} - s = s - \frac{٢}{s} \Rightarrow ٢s - \frac{4}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{٢s^{٢} - 4}{s} = 0$$

$$\Rightarrow ٢s^{٢} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow ٢s^{٢} = 4$$

$$\Rightarrow s^{٢} = ٢$$

$$\Rightarrow s = \pm\sqrt{٢}$$

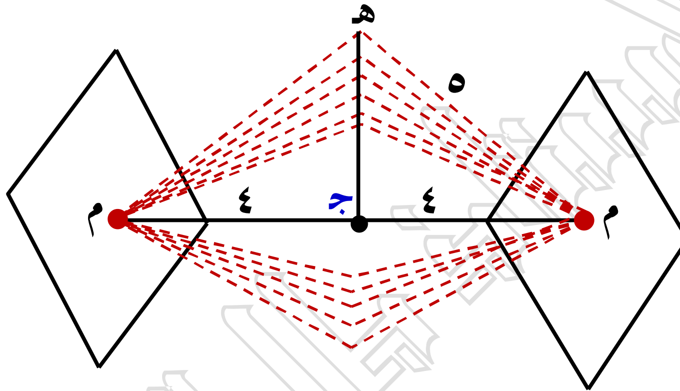
∴ قيم س التي تحقق : د { س } = د { - س } تكون عند : $س = \pm\sqrt{٢}$

45

ليكن : ; 1 ، ; ٢ مستويين متوازيين المسافة بينهما : ٨ سم ، ولتكن : ا نقطة على أحدهما ، اذكر شكل وخصائص المحل الهندسي لمجموعة النقط في الفراغ التي تبعد بعداً ثابتاً متساوياً عن كلا المستويين وبعدها عن ا : يساوي : ٥ سم .

الحل :

هذا رسم تقريبي للمعطيات :



الحظ :

مجموعة النقط تمثلها النقطة : هـ ، وهي مجموعة لانهائية .

∵ النقط تبعد عن المستويين بعداً ثابتاً = ٥ سم ، كذلك المسافة بين المستويين = ٨ سم .

∴ مجموعة النقط تبعد عن جـ مسافة : ٣ سم

∴ مجموعة النقط تبعد عن نقطة ثابتة جـ مقداراً ثابتاً = ٣سم

⇐ المحل الهندسي لمجموعة النقط تمثل دائرة نصف قطرها = ٣سم .

46

أوجد الناتج في أبسط صورة :

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

الحل :

نرتب العوامل بالاستفادة من متطابقة فرق بين مربعين حيث :

$$\{أ + ب\}\{أ - ب\} = أ^2 - ب^2$$

الآن : نرتبها كالتالي :

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

الآن : نأخذ كل عاملين على صورة فرق بين مربعين على حِدة ونوجد الناتج :

$$(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}) = \left[(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{7}\right]\left[(\sqrt{5}+\sqrt{6})-\sqrt{7}\right]$$

$$= \left[(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2\right]$$

$$= \left[5+6+2\sqrt{30}-7\right]$$

$$= \left[11+2\sqrt{30}-7\right]$$

$$= \left[4+2\sqrt{30}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left(\sqrt{7} + (\sqrt{6} - \sqrt{5})\right)\left(\sqrt{7} - (\sqrt{6} - \sqrt{5})\right) = \left(\sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{5}\right)$$

$$= \left[\sqrt{7} + (\sqrt{6} - \sqrt{5})\right]\left[\sqrt{7} - (\sqrt{6} - \sqrt{5})\right]$$

$$= \left[(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2\right]$$

$$= \left[7 - (5 + 6 - 2\sqrt{30})\right]$$

$$= \left[7 - (11 - 2\sqrt{30})\right]$$

$$= \left[7 - 11 + 2\sqrt{30}\right]$$

$$= \left[-4 + 2\sqrt{30}\right] \cdots\cdots\cdots (2)$$

الآن : بضرب { ١ } × { ٢ } ، وتطبيق متطابقة فرق بين مربعين مرة أخرى نجد أن :

$$\left[2\sqrt{30} + 4\right]\left[-4 + 2\sqrt{30}\right] = \left[2\sqrt{30} + 4\right]\left[2\sqrt{30} - 4\right]$$

$$= \left[(2\sqrt{30})^2 - (4)^2\right]$$

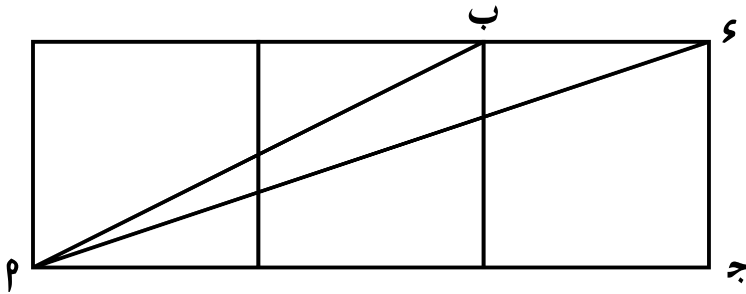
$$= \left[4 \times 30 - 16\right]$$

$$= 120 - 16 = 104$$

∴ قيمة المقدار = ١٠٤ .

47

في الشكل التالي ثلاث مربعات متطابقة ، أوجد مجموع قياس الزاويتين : [Hf + [H]



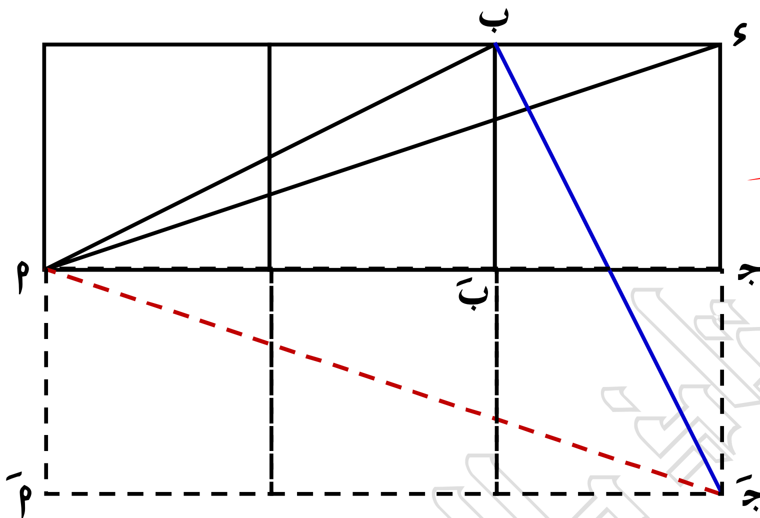
الحل :

بتناظر الشكل حول الضلع : م جـ نجد أن :

لاحظ :

الزاوية : [H] هي نفسها الزاوية : [H [

بالتناظر حول : م جـ .



الآن :

مجموع الزاويتين : [Hf + [H] يساوي الزاوية : [Hf

نفرض طول ضلع المربع = س

⇐ في المثلث : ب م بَ نجد أن : ' ب م '@ = ٥ب@ .... { ١ } { من فيثاغورث }

⇐ في المثلث : م جـ مَ نجد أن : ' م جَـ '@ = ١٠ب@ .... { ٢ } { من فيثاغورث }

⇐ في المثلث : ب ء جَـ نجد أن : ' ب جَـ '@ = ٥ب@ .... { ٣ } { من فيثاغورث }

من : { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } نجد أن : ' م جَـ '@ = ' ب م '@ + ' ب جَـ '@

∴ المثلث : م ب جَـ قائم الزاوية متطابق الضلعين .

∖ [Hf + [H] = [Hf = 45°

48

برهن أن المتتالية التالية :

١١ ، ١١١ ، ١١١١ ، ١١١١١ ، .....

لا تحتوي على أي مربع كامل .

الحل :

أي عدد زوجي يكتب على الصورة : ٢س

⇐ مربعه = ٤س^2 بقسمته على ٤ سيكون الباقي = صفر .

أي عدد فردي يكتب على الصورة : ٢س + ١

⇐ مربعه = ٤س^2 + ٤س + ١ = ٤{ س^2 + س } + ١

بقسمته على ٤ سيكون الباقي = ١ .

∴ أي مربع كامل بقسمته على ٤ سيكون الباقي إما صفر أو واحد .

الآن :

المتتابعة السابقة يمكن كتابة أي حد على الصورة : ١١ + ١٠٠ن ،

حيث : ن : عدد صحيح موجب .

الآن :

١١ + ١٠٠ن = ٣ + ٨ + ١٠٠ن = ٣ + ٤{ ٢ + ٢٥ن }

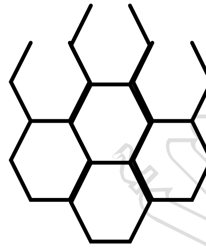
وبقسمته على ٤ سيكون الباقي = ٣

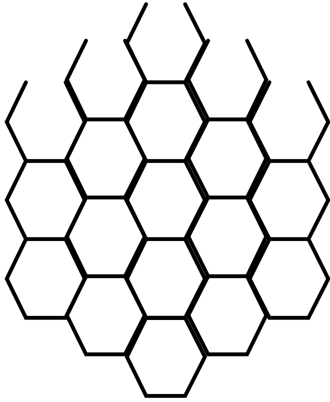
∴ حدود المتتابعة لا تمثل في أي حد لها مربع كامل .

49

إذا كان الشكل الأول فيه خلية واحدة ، والثاني فيه سبع خلايا ، والثالث فيه تسعة عشر خلية ، فكم خلية في الشكل الخامس عشر ؟







الحل :

التغير في الخلايا :

الشكل الأول خلية واحدة .

الشكل الثاني سبع خلايا ، خلية سابقة + ١ × ٦ = ٧

الشكل الثالث مكون من سبع خلايا سابقة + ٢ × ٦ = ١٩

∴ لاحظ الزيادة دوماً من مضاعفات العدد ٦ ، ولها علاقة بالخلية السابقة .

عدد الخلايا الجديدة = رتبة الخلية السابقة × ٦ + عدد الخلايا السابقة

∴ عدد الخلايا في الشكل الخامس عشر

= ٦×١٤ + ٦×١٣ + ٦×١٢ + ... + ٦×٢ + ٦×١ + ١

= ٦ { ١٤ + ١٣ + ... + ٢ + ١ } + ١

= ٦ × ١٠٥ + ١

= ٦٣٠ + ١

= ٦٣١

تأليف الأستاذ / طارق الصيعري

49

إذا كان : س = ١٥ - ص ، $\text{ص} = \frac{14}{\text{س}}$ ، **أوجد قيمة :** $\frac{1}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

الحل :

س = ١٥ - ص .... { ١ } ، $\text{ص} = \frac{14}{\text{س}}$ .... { ٢ }

الطريقة الأولى :

بالتعويض بقيمة : س من { ١ } في { ٢ } نجد أن :

$$\text{ص} = \frac{14}{15 - \text{ص}} \Leftarrow 15\text{ص} - \text{ص}^2 = 14$$

$$\Leftarrow \text{ص}^2 - 15\text{ص} + 14 = 0$$

$$\Leftarrow (\text{ص} - 1)(\text{ص} - 14) = 0$$

الآن : إما ص = ١ ⇐ س = ١٤ ، أو ص = ١٤ ⇐ س = ١

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = ١ + ١٩٦ = ١٩٧ \Leftarrow \frac{1}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \frac{1}{197}$$

الطريقة الثانية :

من { ١ } نجد أن : س + ص = ١٥ ⇐ $\{\text{س} + \text{ص}\}^2 = ١٥^2$

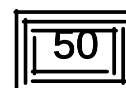
⇐ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{س ص} = ٢٢٥$ .... { ٣ }

من المعادلة { ٢ } نجد أن : س ص = ١٤ ⇐ ٢س ص = ٢٨ .... { ٤ }

بالتعويض من { ٤ } في { ٣ } نجد أن :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢٨ = ٢٢٥ \Leftarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٢٢٥ - ٢٨ = ١٩٧$$

$$\therefore \frac{1}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \frac{1}{197}$$



حدد أيهما أكبر بالإثبات : 2^{300} ، أو : 3^{200}

الحل :

$2^{300} = (2^{3})^{100} = 8^{100}$ .... (1)

$3^{200} = (3^{2})^{100} = 9^{100}$ .... (٢)

من : { ١ } ، { ٢ } نجد أن : $9^{100} > 8^{100}$

∴ $3^{200} > 2^{300}$

51

افرض : أ ، ب ، جـ أطوال أضلاع مثلث قائم ، حيث :

أ + ب + جـ = ٢٢ ، أ^{2} + ب^{2} + جـ^{2} = ٢٠٠

أوجد مساحة المثلث .

الحل :

بترتيب المعطيات :

أ + ب + جـ = ٢٢ .... {١} ، أ^{2} + ب^{2} + جـ^{2} = ٢٠٠............{٢}

نفرض أن : جـ هو الوتر في المثلث .

∴ من فيثاغورث نعلم أن : أ^{2} + ب^{2} = جـ^{2} .... {٣}

بالتعويض من {٣} في {٢} نجد أن :

جـ^{2} + جـ^{2} = ١٠٠ ⇐ ٢جـ^{2} = ٢٠٠ ⇐ جـ^{2} = ١٠٠ ⇐ جـ = ١٠ .... {٤}

بالتعويض بقيمة جـ من {٤} في {١} نجد أن :

أ + ب + ١٠ = ٢٢ ⇐ أ + ب = ١٢ .... {٥}

بتربيع طرفي معادلة {٥} نجد أن :

أ^{2} + ب^{2} + ٢أب = ١٤٤ .... {٦}

ولكن : أ^{2} + ب^{2} + جـ^{2} = ٢٠٠ ⇐ أ^{2} + ب^{2} = ٢٠٠ - جـ^{2} = ٢٠٠ - ١٠٠ = ١٠٠

من المعادلة {٦} : ١٠٠ + ٢أب = ١٤٤ ⇐ ٢أب = ٤٤ ⇐ أب = ٢٢

لاحظ : الضلعان القائمان هما : أ ، ب

⇐ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ أ × ب = $\frac{1}{2}$ × ٢٢ = ١١ .

52

إذا كان: أ + ب = ١ ، أ^2 + ب^2 = ٢ ، احسب قيمة: أ^3 + ب^3

الحل :

(أ + ب)^2 = ١ ⇐ أ^2 + ب^2 + ٢أب = ١

⇐ ٢ + ٢أب = ١

⇐ ٢أب = - ١

⇐ أب = - $\frac{١}{٢}$ .... {١}

الآن :

(أ + ب)^3 = ١ ⇐ أ^3 + ب^3 + ٣أ^{2}ب + ٣أب^2 = ١

⇐ أ^3 + ب^3 + ٣أب (أ + ب) = ١

⇐ أ^3 + ب^3 + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = ١ ـ بالتعويض من {١} وبقيمة : أ + ب ـ

⇐ أ^3 + ب^3 - $\frac{٣}{٢}$ = ١

⇐ أ^3 + ب^3 = $\frac{٥}{٢}$

53

لتكن : أ ، ب ، مصفوفتان من النوع : ٢ × ٢ ، فهل يتحقق دائماً أن :

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})$$

الحل :

نفرض : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

الآن :

$$\text{أ}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ب}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (1)$$

كذلك :

$$\text{أ} + \text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (٢)$$

من : { ١ } ، { ٢ } نجد أن :

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 \neq (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})$$

وهو إثبات كافٍ بإعطاء مثال معاكس أن العلاقة غير صحيحة بصورة عامة في المصفوفات .

54

إذا كان : $5^{s} - 5^{s-1} = 500$ ، كم تساوي قيمة : 10^{s}

الحل :

$5^{s} - 5^{s-1} = 500$ Ü $5^{s} - \frac{5^{s}}{5} = 500$

Ü $\frac{5 \times 5^{s} - 5^{s}}{5} = 500$

Ü $5 \times 5^{s} - 5^{s} = 2500$

Ü $5^{s}(5 - 1) = 2500$

Ü $5^{s} \times 4 = 2500$

Ü $5^{s} = 625$

Ü $5^{s} = 5^{4}$

Ü $s = 4$

∴ ١٠^س = ١٠٠٠٠

55

أثبت أن : $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ ،

يمثل عدد نسبي .

الحل :

الطريقة الأولى :

نفرض أن : $أ = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$ ، $ب = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

كذلك نفرض أن : س = أ + ب $\Leftarrow$ $س^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أ^2ب + ٣أب^2$

$\Leftarrow$ $س^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أب \{أ + ب\}$

$\Leftarrow$ $س^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أب\,س$ .... { ١ }

الآن :

١ $أ^3 = 45 + 29\sqrt{2}$ ، $ب^3 = 45 - 29\sqrt{2}$ $\Leftarrow$ $أ^3 + ب^3 = ٩٠$ ....{ ٢ }

$أ \times ب = \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt[3]{\left(45 + 29\sqrt{2}\right)\left(45 - 29\sqrt{2}\right)}$

$= \sqrt[3]{343} = 7$

∴ ٣أب = ٢١ ....{ ٣ }

من : { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } ستكون عندنا المعادلة : $س^3 - ٢١س - ٩٠ = ٠$

لاحظ أن : س = أ + ب جذر للمعادلة ــ حسب تكوين المعادلة ــ

∴ إذا كان : $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ عدد نسبي ، فإن للمعادلة السابقة جذر نسبي على الأقل .

الآن :

من نظرية العلاقة بين معامل الحد الرئيسي والحد الثابت التي تنص على :

{ إذا كان : $\frac{ل}{م}$ جذر كثيرة الحدود : $أ_k س^k + \cdots\cdots + أ_1 س^1 + أ_0$ ، فإن : ل تقسم أ. ، و م تقسم أن } .

∵ قواسم أن هي ــ ١ ⇐ العدد النسبي هو عدد صحيح وضمن قواسم الحد الثابت .

بتجربة قواسم الحد الثابت وهي : ــ١ ، ــ٢ ، ــ٣ ، ــ٦ ، ــ ٩ ، سنجد القاسم الوحيد الذي يحقق المطلوب عند : س = ٦ ⇐ كثيرة الحدود تقبل القسمة على : س - ٦

∴ $س^3$ - ٣س - ٩٠ = { س - ٦ }{ $س^2$ + ٦س + ١٥ } = ٠

معادلة الدرجة الثانية لها جذران غير حقيقيين ⇐ س = ٦ هو الجذر النسبي الوحيد .

∴ س = أ + ب جذر نسبي لكثيرة الحدود

$$\therefore \quad \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$$

الطريقة الثانية مختصرة من السابقة :

من متطابقة مكعب كامل :

$\text{أ} = \text{ب} + \text{جـ} \Leftarrow \text{أ}^3 = \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب}^2\text{جـ} + ٣\text{ب جـ}^2$

$= \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب جـ} \{ \text{ب} + \text{جـ} \}$

$= \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 + ٣\text{ب جـ أ}$

نفرض : $\text{أ} = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

١ $\text{أ}^3 = \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right)^3$

$= \left(45 + 29\sqrt{2}\right) + \left(45 - 29\sqrt{2}\right) + 3\text{أ}\left(\sqrt[3]{\left(45 - 29\sqrt{2}\right)\left(45 - 29\sqrt{2}\right)}\right)$

$= 90 + 3\text{أ}\sqrt[3]{343} = 90 + 21\text{أ}$

$\therefore \text{أ}^3 = ٢١\text{أ} + ٩٠ \Leftarrow \text{أ}^3 - ٢١\text{أ} - ٩٠ = ٠$

$\Leftarrow \{ \text{أ} - ٦ \}\{ \text{أ}^2 + ٦\text{أ} + ١٥ \} = ٠$

$\Leftarrow \text{أ} = ٦$

$\Leftarrow \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 6$

لأن :

المعادلة : $\text{أ}^2 + ٦\text{أ} + ١٥$ ليس لها جذور في ح .

تأليف الأستاذ طارق الصيعري

الطريقة الثالثة :

نحاول جعل ماتحت الجذر على صورة مكعب كامل :

$$\sqrt[3]{45 \pm 29\sqrt{2}} = \sqrt[3]{27 + 18 \pm 29\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{27 + 18 \pm 27\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[3]{3^3 \pm 3 \times 3^2 \sqrt{2} + 3 \times 3 (\sqrt{2})^2 \pm (\sqrt{2})^3}$$

$$= \sqrt[3]{(3 \pm \sqrt{2})^3} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

56

إذا كانت : د : ص ⟵ ح حيث :

$$د(٢) = 3 \quad ، \quad د(س + 1) = \frac{1}{3}[3\,د(س) + 1]$$

لكل : س > ٢ ، أوجد : $د(100)$

الحل :

بالتعويض عند : س = ٢ نجد أن : $د(3) = \frac{1}{3}[3\,د(٢) + 1] = \frac{10}{3}$

بالتعويض عند : س = ٣ نجد أن : $د(4) = \frac{1}{3}[3\,د(٣) + 1] = \frac{11}{3}$

بالتعويض عند : س = ٤ نجد أن : $د(5) = \frac{1}{3}[3\,د(٤) + 1] = \frac{12}{3}$

لاحظ :

٣ ، $\frac{10}{3}$ ، $\frac{11}{3}$ ، $\frac{12}{3}$ تمثل متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، وأساسها = $\frac{1}{3}$

بسهولة سنجد أن الحد العام هو : $\frac{س + 8}{3}$

$$\therefore\ د(س) = \frac{س + 8}{3} \Leftarrow د(100) = \frac{100 + 8}{3} = 36$$

57

احسب قيمة :

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

الحل :

من متطابقة مكعب كامل :

أ = ب + جـ ⇐ أ^{3} = ب^{3} + جـ^{3} + ٣ب^{2}جـ + ٣ب جـ^{2} = ب^{3} + جـ^{3} + ٣ب جـ { ب + جـ }

= ب^{3} + جـ^{3} + ٣ب جـ أ

نفرض : أ = $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$

∴ أ^{3} = $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^3$

$= \left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right) + \left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right) + 3\,\text{أ}\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}$

$= 12 + 3\,\text{أ}\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} = 12 + 3\,\text{أ}\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = 12 + 3\,\text{أ} \times \frac{5}{3} = 12 + 5\,\text{أ}$

∴ أ^{3} = ٥أ + ١٢ ⇐ أ^{3} - ٥أ - ١٢ = ٠

⇐ { أ - ٣ }{ أ^{2} + ٣أ + ٤ } = ٠

⇐ أ = ٣   المعادلة : { أ^{2} + ٣أ + ٤ } ليس لها جذور حقيقية في ح .

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = 3$$

58

أوجد قيم : س التي تجعل المقدار : $\frac{3}{\sqrt{س - ٢}}$ عدداً نسبياً .

الحل :

المقام : $\sqrt{س - ٢}$ معرف عند : س > ٢ ....{١}

حتى يكون المقدار عدداً نسبياً يجب أن يكون : س - ٢ مربعاً كاملاً .

نفرض : س - ٢ = $م^2$ ⇐ س = $م^2$ + ٢ ....{٢}

من {١} و {٢} نستنتج أن قيم : س هي جميع الأعداد التي تمثل مربع كامل + ٢ ، وأكبر من ٢ .

∴ س ∈ { ٣^2 + ٢ ، ٤^2 + ٢ ، .... }

⇐ س ∈ { ١١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ..... }

59

إذا كان : $أ^2 + ب^2 = ١$ أثبت أن :

$$-\sqrt{٢} \leq أ + ب \leq \sqrt{٢}$$

الحل :

نعلم أن : $أ^2 + ب^2 - ٢أب \geq ٠$ ، ولكن معطى أن : $أ^2 + ب^2 = ١$

$\Leftarrow ١ - ٢أب \geq ٠ \Leftarrow ٢أب \leq ١ \Leftarrow أب \leq \frac{١}{٢}$

الآن :

$(أ + ب)^2 = أ^2 + ب^2 + ٢أب = ١ + ٢أب$

$\because أب \leq \frac{١}{٢} \Leftarrow (أ + ب)^2 \leq ١ + ٢ \times \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow (أ + ب)^2 \leq ٢$

$\Leftarrow |أ + ب| \leq \sqrt{٢}$

$\Leftarrow -\sqrt{٢} \leq أ + ب \leq \sqrt{٢}$

حل آخر :

∵ $أ^2 + ب^2 = ١$ ⇐ من معادلة دائرة الوحدة نجد أن : $جا^2 س + جتا^2 س = 1$

∴ $جا^2 س + جتا^2 س + ٢ جاس جتاس = 1 + ٢ جاس جتاس$

∴ $(جاس + جتاس)^2 = 1 + ٢ جاس جتاس$

∴ $(جاس + جتاس)^2 = 1 + جا٢س$

∴ $(جاس + جتاس)^2 \le 1 + 1$

∴ $(جاس + جتاس)^2 \le ٢$

لاحظ : أكبر قيمة لـــ جا٢س تساوي ١ .

∴ $|جاس + جتاس| \le \sqrt{٢}$

∴ $-\sqrt{٢} \le جاس + جتاس \le \sqrt{٢}$

∴ $-\sqrt{٢} \le أ + ب \le \sqrt{٢}$

60

أيهما أكبر : $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ أم : $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$

الحل :

∵ $9 > 8$

ا $3^{2} > 2^{3}$

Ü $(\sqrt{3})^{2} > (\sqrt{2})^{3}$

Ü $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} > (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$

61

أثبت أن : $\sqrt[3]{10}$ عدد غير نسبي

الحل :

نفرض أن : $s = \sqrt[3]{10}$ Ü $s^3 = 10$ Ü $s^3 - 10 = 0$

الآن :

من النظرية : إذا وجدت جذور نسبية لكثيرة الحدود ، فإنها ضمن قواسم الحد الثابت على قواسم الحد الأول .

واضح أنه لا توجد جذور نسبية .

∵ $\sqrt[3]{10}$ جذر لكثيرة الحدود ⇐ $\sqrt[3]{10}$ جذر غير نسبي .

∴ $\sqrt[3]{10}$ عدد غير نسبي .

62

إذا كان :

أب + أ + ب = 259 ، أ^{2}ب + أب^2 = 2008

فأوجد قيمة : أ^2 + ب^2

الحل :

نفرض أن : أب = س ، أ + ب = ص

الآن :

أب + أ + ب = ٢٥٩ ⇐ س + ص = ٢٥٩ ⇐ ص = ٢٥٩ - س .... {١}

أ^{2}ب + أب^2 = ٢٠٠٨ ⇐ أب {أ + ب} = ٢٠٠٨ ⇐ س ص = ٢٠٠٨ ...... {٢}

بالتعويض من : {١} في {٢} نجد أن :

س {٢٥٩ - س} = ٢٠٠٨ ⇐ ٢٥٩ س - س^2 = ٢٠٠٨

⇐ س^2 - ٢٥٩ س + ٢٠٠٨ = ٠

⇐ {س - ٨} {س - ٢٥١} = ٠

∴ س = ٨ أو س = ٢٥١ ⇐ أب = ٨ ، أ + ب = ٢٥١

الآن :

أ^{2}ب + أب^2 = 2008 ⇐ أب(أ + ب) = 2008 ⇐ أ + ب = 2008 / أب

(أ + ب)^2 = (2008)^2 / (أب)^2 ⇐ أ^2 + ب^2 + 2 × 8 = (2008)^2 / (8)^2

⇐ أ^2 + ب^2 + 16 = 63001 ⇐ أ^2 + ب^2 = 62985

63

حلل المقدار التالي :

١ { س@ + س + ١ }{ س@ + س + ٢ } - ١٢

٢ { س@ + ٣س + ٢ }{ س@ + ٧س + ١٢} - ١٢٠

الحل :

١ نفرض أن : ص = س@ + س + ١ ⇐ يصبح المقدار على الصورة :

ص { ص + ١ } - ١٢ = ص@ + ص - ١٢

= { ص - ٣ } { ص + ٤ }

= { س@ + س - ٢ }{ س@ + س + ٥ }

= { س + ٢ }{ س - ١ }{ س@ + س + ٥ }

٢ بتحليل الأقواس وإعادة الترتيب نجد أن المقدار :

{ س@ + ٣س + ٢ }{ س@ + ٧س + ١٢} - ١٢٠ يساوي :

= { س + ١ }{ س + ٢ }{ س + ٣ }{ س + ٤ } - ١٢٠

= { س@ + ٥س + ٤ }{ س@ + ٥س + ٦ } - ١٢٠

نفرض أن : ص = س@ + ٥س + ٤ يصبح المقدار على الصورة :

ص{ ص + ٢ } - ١٢٠ = ص@ + ٢ص - ١٢٠

= { ص - ١٠ }{ ص + ١٢ }

= { س@ + ٥س - ٦ }{ س@ + ٥س + ١٦ }

= { س - ١ }{ س + ٦ }{ س@ + ٥س + ١٦ }

64

أوجد ناتج الجمع :

$$\cdots\cdots+\frac{1}{216}+\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\text{٢}}+1$$

الحل :

نفرض أن :

$$\cdots\cdots+\frac{1}{216}+\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\text{٢}}+1=\text{أ}$$

الآن :

نحاول أن نجعل كل كسر كحاصل طرح كسرين ، ويكون فيه تساوي بين أحد كسور الحد الأول مع الحد التالي له مع اختلاف الإشارة فيحصل بينها حذف .

$$\cdots\cdots\left(\frac{1}{144}-\frac{11}{54}\right)+\left(\frac{11}{54}-\frac{5}{24}\right)+\left(\frac{5}{24}-\frac{\text{٢}}{9}\right)+\left(\frac{\text{٢}}{9}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\text{٢}}\right)+\frac{1}{\text{٢}}+1=\text{أ}$$

$$\underbrace{\cdots\cdots\frac{1}{144}-\frac{11}{54}+\frac{11}{54}-\frac{5}{24}+\frac{5}{24}-\frac{\text{٢}}{9}+\frac{\text{٢}}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\text{٢}}}_{\text{كل الحدود هذه سوف تلغى}}+\frac{1}{\text{٢}}+1=$$

$$\therefore\ \text{أ}=\text{٢}$$

65

إذا كان :

$$\text{أ} = \sqrt{3\sqrt{\text{أ}\sqrt{3\sqrt{\text{أ}\cdots\cdots}}}}$$

أوجد : أ^{8}

الحل :

$$\text{أ} = \sqrt{3\sqrt{\text{أ}\sqrt{3\sqrt{\text{أ}\cdots\cdots}}}}$$

$$\therefore (\text{أ})^{2} = 3\sqrt{\text{أ}\sqrt{3\sqrt{\text{أ}\cdots\cdots}}}$$

$$\therefore (\text{أ})^{4} = 9 \times \text{أ}\underbrace{\sqrt{3\sqrt{\text{أ}\sqrt{3\sqrt{\text{أ}\cdots\cdots}}}}}_{=\ \text{أ}}$$

يصبح المقدار على الصورة :

$\therefore$ $\text{أ}^{4} = ١٨\text{أ}$ ⇐ $\text{أ}^{4} - ١٨\text{أ} = ٠$ ⇐ $\text{أ}\{\text{أ}^{3} - ١٨\} = ٠$

إما أ = ٠ وهو مستحيل

أو $\text{أ}^{3} - ١٨ = ٠$ ⇐ $\text{أ}^{3} = ١٨$ ⇐ $\text{أ} = ٣٢٤$.

66

أوجد ناتج المقدار :

٢١@ - ٢٠@ + ٢٢@ - ١٩@ + ٢٣@ - ١٨@ + ... + ٤٠@ - ١@

الحل :

نفرض أن :

م = ٢١@ - ٢٠@ + ٢٢@ - ١٩@ + ٢٣@ - ١٨@ + ... + ٤٠@ - ١@

باستخدام متطابقة فرق بين مربعين يصبح المقدار على الصورة :

م = {٢١-٢٠}{٢١+٢٠} + {٢٢-١٩}{٢٢+١٩} + ... + {٤٠-١}{٤٠+١}

ومنه نجد أن :

م = ٤١×١ + ٤١ ×٣ + ٤١ × ٥ + ... + ٤١ × ٣٩

= ٤١ × { ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٣٩ }

ما داخل القوي متتابعة حسابية أساسها = ٢ ، وحدها الأول = ١ ، وعدد الحدود = ٢٠ .

∴ مجموعها = ٤٠٠ .

⇐ م = ٤١ × ٤٠٠ = ١٦٤٠٠ .

67

المثلث : ٢ ب جـ أطوال أضلاعه : ; ، g ، $\sqrt{;^{٢} + g^{٢} + ;g}$ ، أوجد قياس أكبر زواياه .

الحل :

قانون جيب التمام : جتا(أ) = $\dfrac{ب^{٢} + [^{٢} - ٢^{٢}}{٢ب حـ}$

واضح من الأطوال المعطاة أن : $\sqrt{;^{٢} + g^{٢} + ;g}$ أطول الأضلاع .

نفرض أن الضلع الأكبر يقابل الزاوية : $\hat{٢}$.

بالتعويض بقانون جيب التمام نجد أ، :

جتا(أ) = $\dfrac{;^{٢} + g^{٢} - \left(\sqrt{;^{٢} + g^{٢} + ;g}\right)^{٢}}{٢;g}$

Ü جتا(أ) = $\dfrac{;^{٢} + g^{٢} - (;^{٢} + g^{٢} + ;g)}{٢;g}$

Ü جتا(أ) = $\dfrac{;^{٢} + g^{٢} - ;^{٢} - g^{٢} - ;g}{٢;g}$

Ü جتا(أ) = $-\dfrac{;g}{٢;g}$ Ü جتا(أ) = $-\dfrac{1}{٢}$ Ü $\hat{أ} = 120°$

68

أوجد حاصل الجمع :

جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(360)

الحل :

نفرض أن : حـ = جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(360)

قاعدة :

جا(أ) = - جا(360 - أ) Ü (جا(أ))^{٢} = (-جا(360 - أ))^{٢}

Ü جا^{٢}(أ) = جا^{٢}(360 - أ)

ومنه نجد أن : جا^{٢}(0) = جا^{٢}(360) ، جا^{٢}(1) = جا^{٢}(359) ، وهكذا ...

∴ يصبح المقدار على الصورة :

حـ = ٢جا^{٢}(0) + ٢جا^{٢}(1) + ٢جا^{٢}(٢) + ... + ٢جا^{٢}(179) + جا^{٢}(180)

لاحظ : عدد الحدود ٣٦١ حداً كل حدين سيتشابهان سنجمعهما ماعدا الحد رقم ١٨٠ سيبقى وحيداً .

الآن : نعيد كتابة المجموع على الصورة :

حـ = ٢(جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(180))

Ü جا^{٢}(180) + حـ = ٢(جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(180))

Ü 0 + حـ = ٢(جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(180))

Ü حـ = ٢(جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(180))

Ü $\frac{\text{حـ}}{٢}$ = (جا^{٢}(0) + جا^{٢}(1) + جا^{٢}(٢) + ... + جا^{٢}(180))

قاعدة أخرى :

جا(أ) = جا(180 - أ) Ü جا٢(أ) = جا٢(180 - أ)

∴ يصبح المقدار على الصورة :

Ü م/٢ = (٢جا٢(0) + ٢جا٢(1) + ٢جا٢(٢) + ... + ٢جا٢(89) + جا٢(90))

Ü جا٢(90) + م/٢ = (٢جا٢(0) + ٢جا٢(1) + ٢جا٢(٢) + ... + ٢جا٢(90))

Ü جا٢(90) + م/٢ = ٢(جا٢(0) + جا٢(1) + جا٢(٢) + ... + جا٢(90))

Ü 1 + م/٢ = ٢(جا٢(0) + جا٢(1) + جا٢(٢) + ... + جا٢(90))

Ü 1/٢ + م/4 = (جا٢(0) + جا٢(1) + جا٢(٢) + ... + جا٢(90))

تذكر أن عدد الحدود كانت ١٨١ حداً والحد رقم ٩٠ ليس له مساوٍ له لأجل هذا كررنا ماصنعناه سابقاً ، وأصبحت عدد الحدود ٩١ حداً .

قاعدة أخرى أيضاً :

جا(أ) = جتا(90 - أ) Ü جا٢(أ) = جتا٢(90 - أ)

الآن :

∵ 1/٢ + م/4 = (جا٢(0) + جا٢(1) + جا٢(٢) + ... + جا٢(90))

Ü 1/٢ + م/4 = (جتا٢(90) + جتا٢(89) + جتا٢(88) + ... + جا٢(90))

∵ جا٢(أ) + جتا٢(أ) = 1

١ 1/٢ + م/4 = (جتا٢(90) + جتا٢(89) + ... + جا٢(89) + جا٢(90))

= (1 + 1 + 1 + ... + جا٢(45) + 1 + 1 + 1)

Ü 1/٢ + م/4 = 45 + جا٢(45) = 45 + 1/٢ Ü م/4 = 45 Ü **م = 180**

69

أثبت أن :

$$\frac{\text{جا}(33) + \text{جا}(55) + \text{جا}(77) + \text{جا}(99)}{\text{جتا}(33) + \text{جتا}(55) + \text{جتا}(77) + \text{جتا}(99)} = \text{ظا}(66)$$

الحل :

نستخدم متطابقات التحويل من حاصل جمع إلى ضرب التالية :

$$\text{جا}(أ) + \text{جا}(ب) = 2\,\text{جا}\left(\frac{أ + ب}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{أ - ب}{2}\right)$$

$$\text{جتا}(أ) + \text{جتا}(ب) = 2\,\text{جتا}\left(\frac{أ + ب}{2}\right)\text{جتا}\left(\frac{أ - ب}{2}\right)$$

الآن :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{جا}(77) + \text{جا}(33) + \text{جا}(99) + \text{جا}(55)}{\text{جتا}(77) + \text{جتا}(33) + \text{جتا}(99) + \text{جتا}(55)}$$

$$= \frac{2\,\text{جا}(55) \times \text{جتا}(22) + 2\,\text{جا}(77) \times \text{جتا}(22)}{2\,\text{جتا}(55) \times \text{جتا}(22) + 2\,\text{جتا}(77) \times \text{جتا}(22)}$$

$$= \frac{\cancel{2\,\text{جتا}(22)}\left(\text{جا}(77) + \text{جا}(55)\right)}{\cancel{2\,\text{جتا}(22)}\left(\text{جا}(77) + \text{جا}(55)\right)}$$

$$= \frac{2\,\text{جا}(66) \times \text{جتا}(11)}{2\,\text{جتا}(66) \times \text{جتا}(11)} = \frac{\text{جا}(66)}{\text{جتا}(66)} = \text{ظا}(66)$$

= الطرف الأيمن

70

أوجد أقل قيمة للمقدار : $\frac{9\text{س}^2\,\text{جا}^2(\text{س}) + 4}{\text{س}\,\text{جا}(\text{س})}$ في الفترة :

٠ < س < ط

الحل :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نعلم أن :

$$\frac{3\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س}) + 2}{2} \ge \sqrt{6\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س})}$$

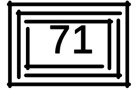
$$\Leftarrow \quad 3\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س}) + 2 \ge 2 \times \sqrt{6\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س})}$$

$$\Leftarrow \quad 9\text{س}^2\,\text{جا}^2(\text{س}) + 4 + 12\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س}) \ge 24\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س})$$

$$\Leftarrow \quad 9\text{س}^2\,\text{جا}^2(\text{س}) + 4 \ge 12\,\text{س}\,\text{جا}(\text{س})$$

$$\Leftarrow \quad \frac{9\text{س}^2\,\text{جا}^2(\text{س}) + 4}{\text{س}\,\text{جا}(\text{س})} \ge 12$$

∴ أقل قيمة للمقدار = ١٢



أثبت أن : $\text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 \geq 3\,\text{أبجـ}$ حيث :

$\text{أ} \geq 0$ ، $\text{ب} \geq 0$ ، $\text{جـ} \geq 0$

الحل :

من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نعلم أن :

$$\frac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3}{3} \geq \sqrt[3]{\text{أ}^3 \times \text{ب}^3 \times \text{جـ}^3}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3}{3} \geq \text{أ} \times \text{ب} \times \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3 \geq 3\,\text{أبجـ}$$

72

أوجد قيمة : $\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{5\sqrt{6\cdots\cdots}}}}$

الحل :

س = $\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{5\sqrt{6\cdots\cdots}}}}$

⇐ $س^2$ = $5\sqrt{6\sqrt{5\sqrt{6\cdots\cdots}}}$

⇐ $س^2$ = $25 \times 6\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{5\cdots\cdots}}}$

⇐ $س^4$ = ١٥٠ س ⇐ $س^4$ - ١٥٠ س = ٠

⇐ س { $س^3$ - ١٥٠ } = ٠

⇐ س = $\sqrt[3]{150}$

73

حل النظام التالي :

$س^3 + ص^3 = ٢٦$ ، $س^2ص + ص^2س = -٨$

الحل :

من متطابقة مربع كامل نجد أن :

$\{س + ص\}^3 = س^3 + ص^3 + ٣\{س^2ص + ص^2س\}$

$\Leftarrow \{س + ص\}^3 = ٢٦ + ٣ \times -٨$

$\Leftarrow \{س + ص\}^3 = ٢ \Leftarrow س + ص = \sqrt[3]{٢} \Leftarrow ص = \sqrt[3]{٢} - س$

∴ بالتعويض في المعادلة الأولى :

$س^3 + \{\sqrt[3]{٢} - س\}^3 = ٢٦$

$\Leftarrow س^3 + \{٢ - ٣ \times \sqrt[3]{٢^2}\,س + ٣\times\sqrt[3]{٢}\,س^2 - س^3\} = ٢٦$

$\Leftarrow س^3 + ٢ - س^3 - ٣\times\sqrt[3]{٢}\,س\{\sqrt[3]{٢} - س\} = ٢٦$

$\Leftarrow -٣\times\sqrt[3]{٢}\,س\{\sqrt[3]{٢} - س\} = ٢٤$

$\Leftarrow \sqrt[3]{٢}\,س\{\sqrt[3]{٢} - س\} = -٨$

74

أوجد قيم : g ، م ، ن حيث : ن عدد طبيعي ، g ، م عددان أوليان ،

تحقق أن :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{lg} + \frac{1}{l} + \frac{1}{g}$$

الحل :

$$\because \frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \frac{1}{lg} = \frac{1}{k} \quad Ü \quad \frac{1 + g + l}{lg} = \frac{1}{k}$$

$$Ü \quad l + g + 1 = \frac{lg}{k}$$

الآن :

م + ل + ١ عدد صحيح لأن م ، ل عددان أوليان والأعداد الأولية صحيحة .

⇐ $\frac{lg}{k}$ أيضاً عدد صحيح ⇐ ن قاسم لـــ ل × م .

∵ ل ، م عددان أوليان ⇐ إما ن = م = ل أو ن = ل أو ن = م

وبالتعويض بالحالات الثلاث في المعادلة المستنتجة في الأعلى نجد أنه دوماً : ن = م = ل = - ١

وهذا يخالف المعطى أن : ن عدد موجب وأن : م ، ل عددان أوليان .

∴ لا توجد قيم تحقق المطلوب .

تأليف الأستاذ / طارق الصيعري

75

إذا كان :

أ + ب = جـ.......{ ١ } ، ب + جـ = د.......{ ٢ }

جـ + د = أ ....{ ٣ }

حيث : ب عدد صحيح موجب ، أوجد أكبر قيمة للمقدار :

أ + ب + جـ + د .

الحل :

بتعويض قيمة : جـ من المعادلة الأولى في الثانية نجد أن :

ب + أ + ب = د ⇐ ٢ب + أ = د ....{ ٤ }

الآن : بتعويض قيمة : أ من المعادلة الثالثة إلى الرابعة نجد أن :

٢ب + جـ + د = د ⇐ جـ = - ٢ب ⇐ جـ : عدد سالب لأن ب عدد موجب .

الآن : بتعويض قيمة جـ في المعادلة الأولى نجد أن :

أ + ب - ٢ب ⇐ أ = - ٣ب ⇐ أ : عدد سالب لأن ب عدد موجب .

الآن : بتعويض قيمة جـ في المعادلة الثانية نجد أن :

ب - ٢ب = د ⇐ د = - ب ⇐ د : عدد سالب لأن ب عدد موجب .

الآن :

بتعويض قيم المجاهيل : أ ، جـ ، د في المقدار نجد أن :

أ + ب + جـ + د = - ٣ب + ب - ٢ب - ب = - ٥ب .

∵ ب : عدد موجب ⇐ أكبر قيمة للمقدار تتحقق عند : ب = ١ وتساوي : ٥

76

من أجل كل عدد حقيقي موجب حيث :

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

بين أن :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

عدد طبيعي

الحل :

سوف نستفيد من المتطابقة التالية :

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

الآن :

بتربيع طرفي المعادلة : $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ نجد أن :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})^2$$

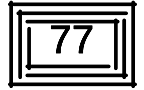
$$\Leftarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 2 + 3 + 6 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{12} - 2\sqrt{18}$$

$$\boxed{\Leftarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 13 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}$$

بالتعويض بقيمة : $\frac{1}{x^2} + x^2$ في المقدار في الأعلى نجد :

$$13 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} = 13$$

وهو المطلوب .



إذا كان : أ ، ب ، ج ، ء أعداد حقيقية تحقق : أ + ب + ج = ١ ، تحقق أن :

$$\sqrt{\text{ن}} \le \frac{\text{ن} + 1}{2}$$

ثم استنتج أن :

$$\sqrt{2\text{أ} + 1} + \sqrt{2\text{ب} + 1} + \sqrt{2\text{ج} + 1} \le 4$$

الحل :

أولاً : من متباينة الوسطين الحسابي والهندسي نعلم أن : $\sqrt{\text{ل} \times \text{ك}} \le \frac{\text{ل} + \text{ك}}{2}$

بالتعويض عن قيمة : ل = ء ، ك = ١ نجد أن :

$$\sqrt{\text{ن} \times 1} \le \frac{\text{ن} + 1}{2} \Rightarrow \sqrt{\text{ن}} \le \frac{\text{ن} + 1}{2}$$

وهو المطلوب .

ثانياً :

أيضاً تطبيق مباشر على متباينة الوسطين ، فنكون ثلاث متباينات على الصورة التالية :

[١] $\sqrt{1 \times (2\text{أ} + 1)} \le \frac{(2\text{أ} + 1) + 1}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{أ} + 1} \le \frac{2\text{أ} + 2}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{أ} + 1} \le \text{أ} + 1$

[٢] $\sqrt{1 \times (2\text{ب} + 1)} \le \frac{(2\text{ب} + 1) + 1}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{ب} + 1} \le \frac{2\text{ب} + 2}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{ب} + 1} \le \text{ب} + 1$

[٣] $\sqrt{1 \times (2\text{ج} + 1)} \le \frac{(2\text{ج} + 1) + 1}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{ج} + 1} \le \frac{2\text{ج} + 2}{2} \Rightarrow \sqrt{2\text{ج} + 1} \le \text{ج} + 1$

بجمع النواتج الثلاث سنجد أن :

$$\sqrt{2\text{أ} + 1} + \sqrt{2\text{ب} + 1} + \sqrt{2\text{ج} + 1} \le \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\text{أ} + 1} + \sqrt{2\text{ب} + 1} + \sqrt{2\text{ج} + 1} \le 4$$

78

إذا كان : س ، ص أعداد حقيقية تحقق :

س@ + س ص + ص@ = ٤ كذلك : س$ + س@ ص@ + ص$ = ٨

أوجد : س^ + س# ص# + ص^

الحل :

من المعطى الأول : س@ + س ص + ص@ = { س + ص }@ - س ص = ٤ ....{١}

من المعطى الثاني : س$ + س@ ص@ + ص$ = { س@ + ص@ }@ - س@ ص@ = ٨ ......{٢}

⇐ { س@ + ص@ + س ص }{ س@ + ص@ - س ص } = ٨

⇐ ٤ × { س@ + ص@ - س ص } = ٨ ⇐ س@ + ص@ - س ص = ٢

⇐ س@ + ص@ = ٢ + س ص ......{٣}

الآن :

بالتعويض من : {٣} في {٢} ، نجد أن :

{ ٢ + س ص }@ - س@ص@ = ٨ ⇐ ٤ + ٤س ص + س@ص@ - س@ص@ = ٨

⇐ ٤س ص = ٤ ⇐ س ص = ١

وبالتعويض في : {١} سنجد أن : س + ص =]٥

الآن :

من متطابقة مكعب كامل نعلم أن :

{ س + ص }# = س# + ص# + ٣س ص { س + ص }

⇐ س# + ص# = { س + ص }# - ٣س ص { س + ص }

⇐ س# + ص# = {]٥ }# - ٣]٥ ......{٤}

الآن :

س^ + س#ص# + ص^ = { س# + ص# }@ - س#ص#

= } }]ه {# - ٣]ه {@ - ١

= ١٢٥ + ٤٥ - ٢ × ٣ × } }]ه {# ×]ه - ١

= ١٧٠ - ٦ × ٢٥ - ١

= ١٧٠ - ١٥١

= ١٩

79

بين هل العدد الآتي حقيقي أو تخيلي مع التفسير :

$$\sqrt[3]{٢ + ١١ت} + \sqrt[3]{٢ - ١١ت}$$

الحل :

من متطابقة مكعب كامل :

س = أ + ب ⇐ $س^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أ^2ب + ٣أب^2 = أ^3 + ب^3 + ٣أب\{أ + ب\}$

$= أ^3 + ب^3 + ٣أب\,س$

نفرض أن :

أ = $\sqrt[3]{٢ + ١١ت}$ ⇐ $أ^3 = ٢ + ١١ت$

ب = $\sqrt[3]{٢ - ١١ت}$ ⇐ $ب^3 = ٢ - ١١ت$

أ × ب = $\sqrt[3]{٢ + ١١ت} \times \sqrt[3]{٢ - ١١ت} = \sqrt[3]{4 - 121ت^2} = \sqrt[3]{125} = 5$

الآن :

$س^3 = أ^3 + ب^3 + ٣أب\,س$ ⇐ $س^3 = ٤ + ١٥س$ ⇐ $س^3 - ١٥س - ٤ = ٠$

بسهولة سنجد أن : ٤ جذر للمعادلة ومنه نجد أن : $\{س - ٤\}\{س^2 + ٤س + ١\} = ٠$

المعادلة : $س^2 + ٤س + ١$ بالقانون العام نجد أن جذراها : $-٢ \pm \sqrt{٣}$ ، وهما حقيقيان .

∴ جذور المعادلة : $س^3 - ١٥س - ٤ = ٠$ جميعها حقيقية

⇐ $\sqrt[3]{٢ + ١١ت} + \sqrt[3]{٢ - ١١ت}$ عدد حقيقي دوماً .

80

أصغر عدد صحيح : بحيث يكون حاصل الضرب :

$$10^{\frac{1}{13}} \times 10^{\frac{٢}{13}} \times 10^{\frac{3}{13}} \times \cdots\cdots 10^{\frac{1-k}{13}}$$

أكبر من : ١٠٠٠,٠٠٠ .

الحل :

الأسس تمثل مجموع متسلسلة حسابية :

$$10^{\frac{1}{13}} \times 10^{\frac{٢}{13}} \times 10^{\frac{3}{13}} \times \cdots\cdots \times 10^{\frac{1-k}{13}} = 10^{\frac{1+٢+3+\cdots+1-k}{13}} = 10^{\frac{(1-k)k}{26}}$$

الآن :

حتى يكون المقدار أكبر من : ١٠٠٠،٠٠٠ = ١٠ ^{٨} يجب أن يكون الأس أكبر من ٦ .

المطلوب :

قيمة : ن حتى يكون : $\frac{(1-k)k}{26}$ > ٦ ⇐ ن { ن - ١ } > ١٥٦

⇐ ن { ن - ١ } > ١٣ × ١٢

⇐ ن > ١٣ ⇐ **ن = ١٤**

81

إذا كانت المعادلة : س@ - ٥س + م = ٠ لها الجذران : ل ، ك

يحققان : ل# + ك# = ١٢٥ ، فما قيمة : م .

الحل :

∵ ل ، ك جذران للدالة ⇐ ل + ك = ٥ ، ل × ك = م

الآن :

من متطابقة مكعب كامل نجد أن :

⇐ {ك + ل}# = ك# + ل# + ٣ ك × ل {ك + ل}

⇐ ٥# = ١٢٥ + ٣م × ٥

⇐ ١٢٥ = ١٢٥ + ١٥م

⇐ ١٥م = ٠

⇐ م = ٠

82

إذا كانت :

$$10^{س}+10^{س+1}+10^{س+2}+\cdots+10^{س+10}=100^{س}+100^{س+1}+100^{س+2}+\cdots+100^{س+10}$$

أوجد قيمة : س

الحل :

الطرف الأيمن متسلسلة هندسية أساسها = ١٠ ، وحدها الأول = $10^{س}$ ، وعدد حدودها = ١٠

$\therefore$ مجموعها = $\dfrac{10^{س}\times(10^{10}-1)}{10-1}$ ... (1)

الطرف الأيسر متسلسلة هندسية أساسها =١٠٠ ، وحدها الأول =$100^{س}$ ، وعدد حدودها = ١٠

$\therefore$ مجموعها = $\dfrac{100^{س}\times(100^{10}-1)}{100-1}$ ... (٢)

الآن : بمساواة : (1) ، (٢) نجد أن :

$$\Leftarrow\quad \frac{10^{س}\times(10^{10}-1)}{10-1}=\frac{100^{س}\times(100^{10}-1)}{100-1}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{10^{س}\times(10^{10}-1)}{10-1}=\frac{10^{2س}\times((10^{10})^{2}-1)}{(10^{2}-1)}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{(10^{2}-1)\times(10^{10}-1)}{((10^{10})^{2}-1)\times(10-1)}=\frac{10^{2س}}{10^{س}}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{(10-1)(10+1)(10^{10}-1)}{(10^{10}-1)(10^{10}+1)(10-1)}=\frac{10^{2س}}{10^{س}}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{(10+1)}{(10^{10}+1)}=10^{س}$$

بأخذ اللوغاريتم العشري للطرفين نجد أن : $س = لو(11) - لو(10^{10}+1)$

83

معين محيطه يساوي : ٤٠ ، ومساحته تساوي : ٦٠ ؛ احسب طول كل من قطريه .

الحل :

نفرض طول الضلع = م ، وأطوال أنصاف الأقطار : ب ، ج .

محيط المعين = ٤ × طول الضلع = ٤م ⇐ ٤م = ٤٠ ⇐ **م = ١٠**

مساحة المعين = ½ × حاصل ضرب القطرين = ½ × ٢ب × ٢ج ⇐ **ب ج = ٣٠**

∵ القطران في المعين يقسمانه إلى أربع مثلثات قوائم ، الوتر هو ضلع المعين ، والضلعان القائمان هما أنصاف الأقطار .

∴ ب² + ج² = م² ⇐ ب² + ج² = ١٠٠ ، ولكن : f = 30/[

١ $\frac{900}{[^2}$ + [² = 100 Ü 900 + [⁴ = 100[²

Ü [⁴ - 100[² + 900 = 0

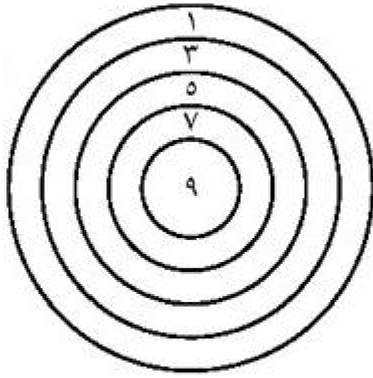
Ü ([² - 90)([² - 10) = 0

ومنه سنجد أن نصفي قطرا المعين هما : ٣ [١٠| ، [١٠|

∴ قطرا المعين : ٦ [١٠| ، ٢ [١٠|

84

رمى أحمد ٦ رميات نحو لوح الأسهم المدرج كما في الشكل، وأصاب اللوح في كل مرة، فأي الأعداد التالية يمكن أن يكون مجموع رمياته:



(أ) ٣١
(ب) ٢٩
(جـ) ٢٨
(د) ١٧
(هـ) ٤

الحل :

نلاحظ أن الأعداد جميعها فردية ، وهناك نظرية تقول أن حاصل جمع ن من الأعداد الفردية لها حالتان :

- إذا كان : ن عدد فردية فإن الناتج عدد فردي .
- وإذا كانت : ن عدد زوجي فإن الناتج عدد زوجي .

الآن :

بما أنه رمى ست رميات نحو لوح الأسهم ⇐ عدد النتائج زوجي ، وهذا يعني أن عدد الأعداد زوجي .

نلاحظ أن النتائج فيها قيمتان زوجيتان فقط : ٤ ، ٢٨ .

القيمة : ٤ مستبعدة لأنه رمى ست رميات وأقل نتيجة هي الواحد فهذا يعني أن المجموع سيكون : ٦

وبذلك ستكون الإجابة الصحيحة هي : ٢٨ .

85

عدد سكان قرية ما يساوي س^2. إذا زاد عدد السكان ١٠٠ نسمة، أصبح عدد السكان (س + ص)^2 + ١ ، وبعد زيادة ١٠٠ نسمة أخرى، يصبح عدد السكان (س + ص + ل)^2.

فإن عدد سكان القرية قبل الزيادتين هو :

(أ) ٢٢٠٩ (ب) ٣٤٨١ (ج) ٢٥٠٠ (د) ٢٤٠١ (هـ) ٣٠٢٥

الحل :

عدد السكان = س^2 ، وبعد الزيادة = س^2 + ١٠٠

∴ { س + ص }^{2} + ١ = س^2 + ١٠٠ ⇐ س^2 + ص^2 +٢س ص + ١ = س^2 + ١٠٠

⇐ ص^2 + ٢س ص = ٩٩ ....{١}

كذلك بعد الزيادة الثانية يصبح عدد السكان = س^2 + ٢٠٠

∴ { س + ص + ل }^{2} = س^2 + ٢٠٠

⇐ س^2 + ص^2 + ل^2 + ٢س ص + ٢س ل + ٢ص ل = س^2 + ٢٠٠

⇐ ص^2 + ٢س ص + ل^2 + ٢س ل + ٢ص ل = ٢٠٠ ــ بالتعويض من : {١} ــ

⇐ ٩٩ + ل { ل + ٢س + ٢ص } = ٢٠٠

⇐ ل { ل + ٢س + ٢ص } = ١٠١ ــ ١٠١ عدد أولي ــ

⇐ ل = ١ ، ل + ٢ { س + ص } = ١٠١ ⇐ ٢{ س + ص } = ١٠٠

⇐ س + ص = ٥٠ ....{٢}

بالتعويض من : {٢} في المعادلة : {س + ص}^{2} + ١ = س^2 + ١٠٠ ، نجد :

٥٠^2 + ١ = س^2 + ١٠٠ ⇐ س^2 = ٢٥٠٠ + ١ - ١٠٠ = ٢٤٠١

∴ عدد السكان قبل الزيادتين = ٢٤٠١

86

أوجد باقي قسمة : ٢^٢٢)) على : ٩٩ .

الحل :

من مفكوك ذات الحدين نعلم أن :

$$(\text{أ} + \text{ب})^{K} = \sum_{;=0}^{K=;} \binom{K}{;} \times \text{أ}^{K-;} \times \text{ب}^{;}$$

$$= \text{أ}^{K} + \binom{K}{1} \times \text{أ}^{K-1} \times \text{ب}^{1} + \binom{K}{2} \times \text{أ}^{K-2} \times \text{ب}^{2} + \cdots + \binom{K}{K-1} \times \text{أ} \times \text{ب}^{K-1} + \text{ب}^{K}$$

الآن :

$$٢^{99} = (1+1)^{99} = 1 + \binom{99}{1} + \binom{99}{2} + \cdots + \binom{99}{98} + 1$$

لاحظ أن هذا المقدار : $\binom{99}{1} + \binom{99}{2} + \cdots + \binom{99}{98}$ من مضاعفات : ٩٩ ، يعني أن جميع حدود المقدار تقبل القسمة على : ٩٩ ، وسيبقى فقط الحدان الأول ، والأخير ، ومجموعهما = ٢ .

أي يمكن كتابة المقدار على الصورة : ٩٩س + ٢ .

∴ الباقي = ٢ .

87

أوجد ناتج المجموع :

$$1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + \ldots\ldots + 1430\times1430!$$

الحل :

المطلوب على الصورة : $\sum_{K=1}^{1430} K \times K!$

الآن :

بإضافة ، وحذف : $K!$ سنجد أن :

$$\sum_{K=1}^{1430} K \times K! = \sum_{K=1}^{1430} K \times K! + K! - K!$$

$$= \sum_{K=1}^{1430} (1+K)K! - K!$$

$$= \sum_{K=1}^{1430} (1+K)! - K!$$

$$\therefore \sum_{K=1}^{1430} (1+K)! - K! = 2! - 1! + 3! - 2! + \ldots\ldots + 1431! - 1430!$$

$$= -1! + 1430!$$

لاحظ :

يوجد حد سيلغى في كل مرة بين اللاحق والسابق .

88

أوجد عدد الأزواج الصحيحة : { س ، ص } التي تحقق :

{ س@ + ص }{ س + ص@ } = { س + ص }#

الحل :

أولاً نثبت الحل الابتدائي التالي :

{ ٠ ، م } ، { م ، ٠ } ، م ∈ ص

{ م@ + ٠ }{ م + ٠ } = { م + ٠ }# = م#

باستبعاد هذه الصورة من الحلول نتبع الخطوات التالية :

بفك الأقواس والاختصار نجد أن :

س# + س@ص@ + سص + ص# = س# + ص# + ٣ { س + ص }س ص

⇐ س ص { س ص + ١ } = ٣{ س + ص }س ص

بالقسمة على : س ص حيث : س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ ، نجد أن :

س ص + ١ = ٣س + ٣ص ⇐ س ص - ٣س - ٣ص = -١

⇐ { س - ٣ }{ ص - ٣ } = ٨

بأخذ الاحتمالات الممكنة لتحليل العدد : ٨ نجد أن الحالات التالية :

الحالة الأولى : { س - ٣ }{ ص - ٣ } = ١ × ٨

س - ٣ = ١ ⇐ س = ٤ ، ص - ٣ = ٨ ⇐ ص = ١١ يحقق المعادلة .

الحالة الثانية : { س - ٣ }{ ص - ٣ } = ٢ × ٤

س - ٣ = ٢ ⇐ س = ٥ ، ص - ٣ = ٤ ⇐ ص = ٧ يحقق المعادلة .

الحالة الثالثة : { س - ٣ }{ ص - ٣ } = - ١ × - ٨

س - ٣ = - ١ ⇐ س = ٢ ، ص - ٣ = - ٨ ⇐ ص = - ٥ يحقق المعادلة .

الحالة الرابعة : { س - ٣ }{ ص - ٣ } = - ٢ × - ٤

س - ٣ = - ٢ ⇐ س = ١ ، ص - ٣ = - ٤ ⇐ ص = - ١ يحقق المعادلة .

∴ عندنا الأزواج التالية :

{ ٤ ، ١١ } ، { ٥ ، ٧ } ، { ٢ ، - ٥ } ، { ١ ، - ١ }

وبالتبديل بينهما سنحصل على أربعة أزواج أخرى .

∴ عدد الأزواج المرتبة التي تحقق المعادلة بدون الحل الابتدائي = ٨ حلول .

ولو دخل الحل الابتدائي السابق سيكون عدد الحلول الصحيحة لانهائية .

89

أوجد جميع الثلاثيات : { س ، ص ، ع } المكونة من أعداد أولية حيث تكون الأعداد : ص - س ، ع - س ، ع - ص أولية أيضاً .

الحل :

قواعد مهمة لفهم الحل :

- كل الأعداد الأولية فردية عدا العدد : ٢ العدد الأولي الوحيد زوجي .
- حاصل جمع أو طرح أي عددين فرديين هو عدد زوجي .

الآن :

بجمع الأعداد الثلاثة : ص - س + ع - س + ع - ص = ٢{ ع - س } وهو عدد زوجي هذا

يعني أن أحد الأعداد الثلاثة = ٢ ⇐ س = ٢ لأن : ص - س ، ع - س > ٠ .

كذلك :

∵ ع - ص أولي ، وزوجي ⇐ ع - ص = ٢ ......{ ١ }

الآن :

نفرض أن : ص - ٢ = م ⇐ ص - م = ٢ ......{ ٢ }

ع - ٢ = ب ⇐ ع - ب = ٢ ......{ ٣ }

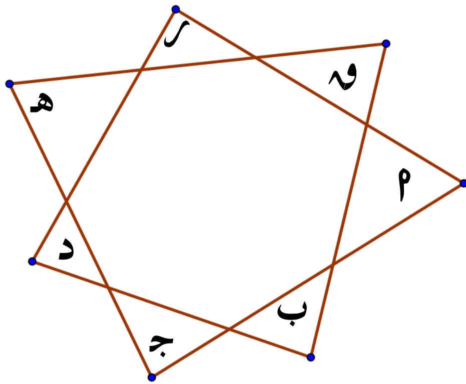
من : { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } نلاحظ أن الأعداد الأولية الفرق بينها = ٢

⇐ الأعداد تمثل أعداد توأمة .

∴ صورة الحلول ستكون : { ٢ ، ص ، ع } بشرط أن : ع - ص = ٢ .

أمثلة على الحلول : { ٢ ،

90



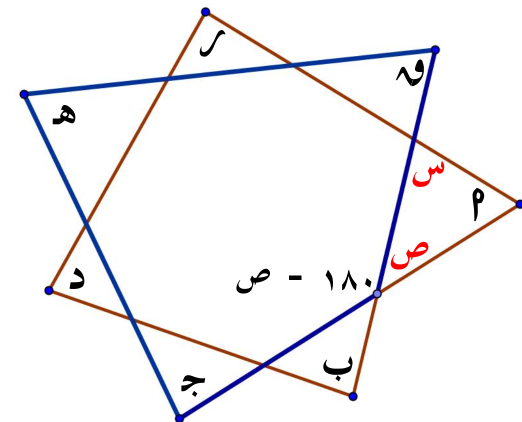
أوجد المجموع :

أ + ب + جـ + د + هـ + ر + و حيث :

أ ، ب ، جـ + د ، هـ ، ر ، و هي الزوايا

الموضحة في الشكل .

الحل :



بتقسيم الشكل لمضلعين رباعيين كما موضح في

الرسم والخطوات نجد أن :

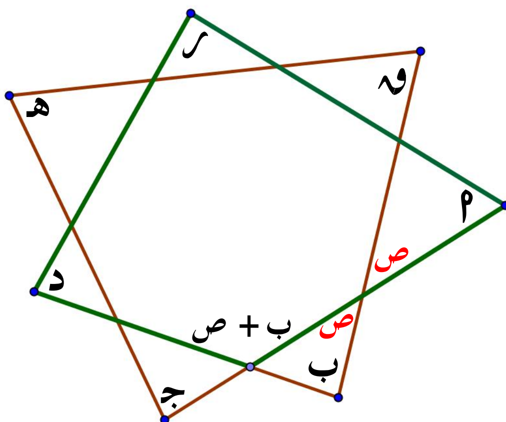
المضلع باللون الأزرق رباعي مجموع زواياه = ٣٦٠ْ

⇐ و + هـ + جـ + ١٨٠ْ - ص = ٣٦٠ْ

⇐ و + هـ + جـ - ص = ١٨٠ْ ......{١}

الآن :

في المضلع ذي اللون الأخضر رباعي أيضاً مجموع زواياه = ٣٦٠ْ



⇐ أ + ب + ص + د + ر = ٣٦٠ْ .....{٢}

بجمع : {١} + {٢} =

أ + ب + جـ + د + هـ + ر + و = ٥٤٠ْ

وهو مجموع الزوايا الموضحة في الشكل .

91

في المثلث : ع هـ و القائم الزاوية في : هـ حيث : ' ع هـ ' = م ، ' هـ و ' = ب ، ' و ع ' = د **أثبت أن :**

١ مساحة المثلث تساوي : $\frac{1}{٢}$ أب جا i .

٢ مساحة المثلث تساوي : $\frac{أ^{٢} جا u جا i}{٢ جا R}$.

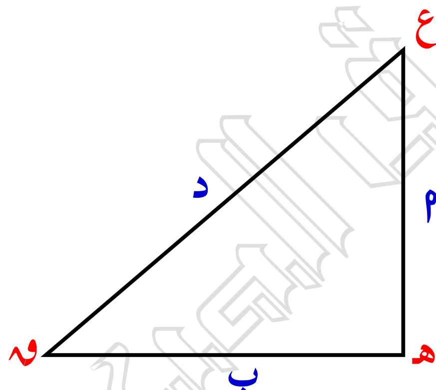
٣ مساحة المثلث تساوي : $\sqrt{s(s-H)(s-f)(s-\})}$

حيث : $p = \frac{H+f+\}}{٢}$.

الحل :

نعلم أن قانون مساحة المثلث : ½ القاعدة × الارتفاع .

كذلك في المثلث القائم الزاوية مساحته تساوي : ½ في حاصل ضرب الضلعين القائمين .



١

∴ مساحة المثلث : ع هـ و = $\frac{1}{٢}$ أب

∵ جا i = جا 90 = 1

الآن : $\frac{1}{٢}$ أب جا i = $\frac{1}{٢}$ أب جا90 = $\frac{1}{٢}$ أب

٢

من العلاقات المثلثية للمثلث القائم الزاوية :

$\text{جا}R = \frac{H}{\}}$ Ü $\boxed{\} = \frac{H}{\text{جا}R}$ ، بالمثل : $\text{جا}u = \frac{\text{ب}}{\}}$ Ü $\boxed{f = \}\,\text{جا}u}$

الآن :

من الفقرة الأولى نعلم أن مساحة المثلث : ع هـ و $= \frac{1}{٢}\text{أ ب جا}\, i$

$= \frac{1}{٢}\text{أ}\,\}\,\text{جا}u\,\text{جا}\, i$

$= \frac{1}{٢}\text{أ}\,\frac{\text{أ}}{\text{جا}R}\,\text{جا}u\,\text{جا}\, i$

$= \frac{\text{أ}^{٢}\,\text{جا}u\,\text{جا}\, i}{٢\,\text{جا}R}$

٣

من قانون جيب التمام : $\text{جتا}\, i = \frac{H^{٢} + f^{٢} - \}^{٢}}{٢Hf}$

كذلك من المتطابقة الأساسية الأولى :

$$\text{جا}\, i = \sqrt{1 - \text{جتا}^{٢} i} = \sqrt{1 - \left(\frac{H^{٢} + f^{٢} - \}^{٢}}{٢Hf}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{(٢Hf)^{٢} - (H^{٢} + f^{٢} - \}^{٢})^{٢}}{(٢Hf)^{٢}}}$$

وسنحتاج في الحل إلى متطابقة فرق بين مربعين فكن على ذُكرٍ .

تأليف الأستاذ طارق الصيعري

الآن :

من القانون في الفقرة الأولى :

مساحة المثلث : ع هـ و $= \frac{1}{٢}$ أ ب جا i

$= \frac{1}{٢}$ أ ب $\sqrt{\frac{{}^{٢}({}^{٢}\} - {}^{٢}f + {}^{٢}H) - {}^{٢}(f H ٢)}{{}^{٢}(f H ٢)}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{{}^{٢}({}^{٢}\} - {}^{٢}f + {}^{٢}H) - {}^{٢}(f H ٢)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{{}^{٢}({}^{٢}\} - {}^{٢}f + {}^{٢}H) - {}^{٢}(f H ٢)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{({}^{٢}\} - {}^{٢}f + {}^{٢}H - f H ٢)({}^{٢}\} + {}^{٢}f - {}^{٢}H - f H ٢)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{({}^{٢}\} - {}^{٢}(f + H))({}^{٢}(f - H) - {}^{٢}\})}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{({}^{٢}\} - {}^{٢}(f + H))({}^{٢}(f - H) - {}^{٢}\})}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(\} - f + H)(\} - f + H)(f - H + \})(f + H - \})}$

$= \sqrt{\frac{(\} - f + H)(\} - f + H)(f - H + \})(f + H - \})}{16}}$

$= \sqrt{\frac{(\} - f + H)}{٢}\,\frac{(\} - f + H)}{٢}\,\frac{(f - H + \})}{٢}\,\frac{(f + H - \})}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{(\} + f + H)}{٢}\,\frac{(\}٢ - \} + f + H)}{٢}\,\frac{(f٢ - f + H + \})}{٢}\,\frac{(H٢ - f + H + \})}{٢}}$

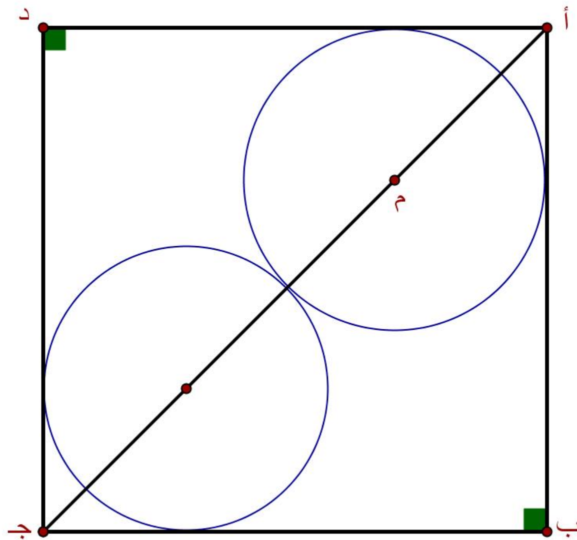
$= \sqrt{\frac{(\} + f + H)}{٢}\,\frac{(\}٢ - \} + f + H)}{٢}\,\frac{(f٢ - f + H + \})}{٢}\,\frac{(H٢ - f + H + \})}{٢}}$

$= \sqrt{\frac{(\} + f + H)}{٢}\left(\} - \frac{\} + f + H}{٢}\right)\left(f - \frac{\} + f + H}{٢}\right)\left(H - \frac{\} + f + H}{٢}\right)}$

$= \sqrt{(\} - p)(f - p)(H - p)p}$

وهي مساحة المثلث بمعلومية نصف المحيط وتسمى صيغة هيرون .

92



أوجد نصف قطر الدائرتين المماستين للمربع كما في الشكل علماً أن :

‖ أ ب ‖ = ٨ .

الحل :

العمل :

نوصل نقط التماس كما في الشكل أسفل . يصبح الشكل : أ هـ م ن مربع طول ضلعه يساوي نصف قطر الدائرة ، وذلك مستنتج من نظرية المماسان المنطلقان من نقطة واحدة متطابقان .

نفرض أن : ‖ أ هـ ‖ = نق .

الآن :

المثلث : أ ب جـ قائم الزاوية . من فيثاغورث

سنجد أن طول الوتر : ‖ أ جـ ‖ = ٨ √٢ .

أيضاً :

أ هـ م مثلث قائم الزاوية فيه :

‖ أ م ‖ = س √٢ .

والمسافة بين المركزين تساوي : ٢س .

أيضاً المسافة من مركز الدائرة الثانية إلى النقطة : جـ تساوي : س √٢ .

الآن :

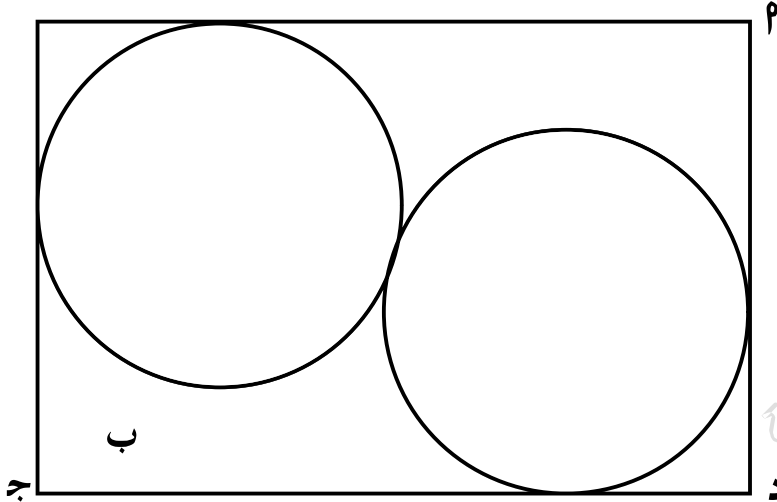
٢س [٢ + ٢س تمثل طول : ' ٩ جـ ' ، ولكن طول : ' ٩ جـ ' =٨ [٢

∴ ٢س [٢ + ٢س = [١٤٥| ⇐ س {٢ [٢ + ٢} = [٢

⇐ س = $\frac{8\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢} + ٢} = \frac{4\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} + 1}$

وهي تمثل نصف قطر الدائرتين المتطابقتين .

93



أوجد نصف قطر الدائرتين المماستين للمستطيل كما في الشكل علماً أن :

' م ب ' = ٩ ، ' ب جـ ' = ٨

الحل :

العمل :

نوصل أنصاف الأقطار كما هو موضح في الشكل أمامك .

الآن :

' ن م ' = ٢ نو .

' ن هـ ' = ٩ - ٢ نو .

المثلث : م ن هـ قائم الزاوية من فيثاغورث سنجد أن : ' م هـ ' = [٣٦ نو - ٨١

الآن :

' عك ' = ٢نو + ' م هـ ' ⟸ ٢نو = ٨ - ' م هـ '

⟸ ٢نو - ٨ = - [٣٦نو - ٨١]

⟸ ٤نو@ - ٣٢نو + ٦٤ = ٣٦نو - ٨١

⟸ ٤نو@ - ٦٨نو + ١٤٥ = ٠

الآن :

بحل المعادلة من الدرجة الثانية سنجد أن الحل الممكن : نو = ﻫ٪

تأليف الأستاذ طارق الصيعري

94

احسب : $\text{جا}(20^\circ)\,\text{ظا}(10^\circ) + \text{جا}(20^\circ)\,\text{ظتا}(10^\circ)$

الحل :

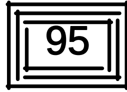
$$\text{جا}(20^\circ)\,\text{ظا}(10^\circ) + \text{جا}(20^\circ)\,\text{ظتا}(10^\circ) = \text{جا}(20^\circ)\left[\text{ظا}(10^\circ) + \text{ظتا}(10^\circ)\right]$$

$$= \text{جا}(20^\circ)\left[\frac{\text{جا}(10^\circ)}{\text{جتا}(10^\circ)} + \frac{\text{جتا}(10^\circ)}{\text{جا}(10^\circ)}\right]$$

$$= \text{جا}(20^\circ)\left[\frac{\text{جا}^2(10^\circ) + \text{جتا}^2(10^\circ)}{\text{جا}(10^\circ)\,\text{جتا}(10^\circ)}\right]$$

$$= \text{جا}(20^\circ)\,\frac{1}{\frac{1}{2}\,\text{جا}(20^\circ)}$$

$$= 2$$



إذا كانت : S = جا(١٥) + جتا(١٥) **أوجد :** S^5 .

الحل :

S = جا(١٥) + جتا(١٥)

= جا(٤٥ − ٣٠) + جتا(٤٥ − ٣٠)

= جا(٤٥)جتا(٣٠) − جتا(٤٥)جا(٣٠) + جتا(٤٥)جتا(٣٠) + جا(٤٥)جا(٣٠)

= جا(٤٥)جتا(٣٠) − جتا(٤٥)جا(٣٠) + جا(٤٥)جتا(٣٠) + جتا(٤٥)جا(٣٠)

= جا(٤٥)جتا(٣٠) + جا(٤٥)جتا(٣٠)

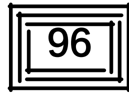
= ٢ جا(٤٥)جتا(٣٠)

$= ٢ \times \frac{\sqrt{3}}{٢\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{٢}}$

الآن :

١ $S^٢ = \frac{3}{٢}$ Ü $S^4 = \frac{9}{4}$ Ü $\boxed{S^5 = \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{٢}}}$



إذا كانت : ظاS + ظاW + ظاS × ظاW = ١ ، S − W = 5

أوجد قيم : W .

الحل :

ظاS + ظاW + ظاS ´ ظاW = ١ Ü ظاS + ظاW = ١ - ظاS ´ ظاW

Ü $\frac{\text{ظاS + ظاW}}{\text{١ - ظاS ´ ظاW}}$ = 1

Ü ظا(s + w) = 1

Ü ظا(5 - w٢) = 1

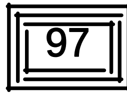
الآن :

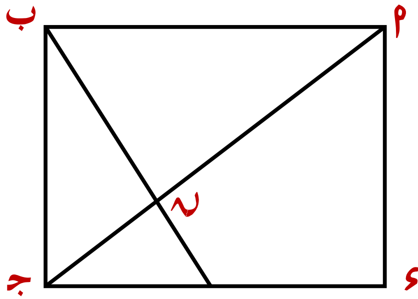
إما : ظا(5 - w٢) = ظا(45°) Ü 5 - w٢ = 45 Ü w = 25°

أو : ظا(5 - w٢) = ظا(225°) Ü 5 - w٢ = 225 Ü w = 115°

أخيراً :

الصورة العامة لقيم : ص ∋ { ٢٥ْ + ٢ م π ، ١١٥ْ + ٢ م π ' ، م ∋ ص .





في المستطيل : أ ب ج ء . النقطة : س

على : ج ء بحيث : ب س ⊥ أ ج **، ويتقاطعان**

في النقطة : ن **. إذا كان :** ب ن = ٤ ، ن ج = ٢ .

أوجد مساحة المستطيل : أ ب ج ء .

الحل :

المثلث : ب ن ج قائم الزاوية فيه : ب ج وتر من فيثاغورث سنجد أن : ب ج = $\sqrt{٢٠}$.

كذلك :

المثلث : أ ب ج قائم الزاوية فيه : ب ن ارتفاع نازل على الوتر : أ ج

من النظرية :

{ طول الارتفاع النازل على الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الوسط المتناسب بين طولي مسقطي الضلعين القائمين على الوتر } .

سنجد أن : $(ب ن)^2$ = أ ن × ن ج

⇐ ٤^2 = أ ن × ٢ ⇐ أ ن = ٨ ⇐ أ ج = ١٠ .

∴ من فيثاغورث سنجد أن : أ ب = $\sqrt{٨٠}$

∴ مساحة المستطيل تساوي : $\sqrt{٨٠} \times \sqrt{٢٠}$ = ٤٠

98

لتكن : س ، ص ، ع أعداد حقيقية تحقق النظام :

{ س + ص }{ س + ص + ع} = ١٢٠

{ ص + ع }{ س + ص + ع} = ٩٦

{ ع+ س }{ س + ص + ع} = ٧٢

أوجد قيمة : س + ص + ع

الحل :

للتبسيط نفرض أن : س + ص + ع = م .

الآن :

بجمع المعادلات الثلاث سنجد أن :

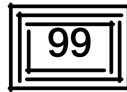
م{ س + ص } + م{ ص + ع} + م{ ع+ س } = ٢٨٨

⇐ م { س + ص + ص + ع + ع+ س } = ٢٨٨

⇐ م { ٢{ س + ص + ع}} = ٢٨٨

⇐ ٢م@ = ٢٨٨ ⇐ م@ = ١٤٤ م= ١٢

∴ س + ص + ع= _ ١٢ .



ليكن : ع = ١ + ٩! + ٩@ + ٩# + ... + ٩!$#! . **أثبت أن :**

[١] ع تقبل القسمة على : ٥ .

[٢] ع - ١ تقبل القسمة على : ٧ .

الحل الأول :

[١]

لاحظ أن : $٩^{ن} = \{ ١٠ - ١ \}^{ن} = 10^{K} - \binom{K}{1} \times 10^{K-1} + \binom{K}{٢} \times 10^{K-٢} - \cdots + 10 - 1$

الآن :

كل الحدود يظهر فيها العدد : ١٠ وهو يقبل القسمة على : ٥ ، ويتبقى فقط الحد الأخير .

إذا كان : ن عدد زوجي ، فإن : الحد الأخير موجب ، وإذا كان : ن عدد فردي ، فإن الحد الأخير سالب .

عودة للسؤال :

من الحد الثالث : ٩@ سيكون لدينا ١٤٣٠ حداً أحدها موجب والآخر سالب لأجل هذا سيتلاشى الواحد وسيبقى ، جميعها تقبل القسمة على : ٥ ويتبقى الحدان الأول والأخير ، ومجموعهما يقبل القسمة على : ٥ .

خلاصة :

باستخدام مفكوك ذات الحدين بالفكرة في الأعلى ستكون جميع الحدود من عوامل : ١٠ وهو مقدار يقبل القسمة على : ٥ .

الحل الثاني :

١

بما أن عدد حدود : ع زوجي ، و تساوي : ١٤٣٢ حداً إذاً يمكن أخذ كل حدين كالتالي :

!$#!٩ + ... + #٩ + @٩ + !٩ + ١ = ع

{ !$#!٩ + !$#)٩ } + ... + { %٩ + $٩ } + { #٩ + @٩ } + { !٩ + ١ } =

{ ٩ + ١ }!$#)٩ + ... + { ٩ + ١ }$٩ + { ٩ + ١ }@٩ + { ٩ + ١ } =

!$#)٩ × ١٠ + ... +$٩ × ١٠ + @٩ × ١٠ + ١٠ =

{ !$#)٩ + ... +$٩ + @٩ } ١٠ =

وهو عدد يقبل القسمة على : ٥ .

٢

∵ عدد حدود : ع - ١ يساوي : ١٤٣١ ، وهو يقبل القسمة على : ٣ . إذاً يمكن أخذ كل ثلاثة حدود على حده كالتالي :

!$#!٩ + ... + #٩ + @٩ + !٩ + ١ = ع - ١

{ !$#!٩ + !$#)٩ + !$@(٩ } + ...+ { ^٩ + %٩ + $٩ } + {#٩ + @٩ + !٩ } =

!$@(٩ × ٩١ + ...+$٩ × ٩١ + ٩ × ٩١ =

{ !$@(٩ + ...+$٩ + ٩ } ٩١ =

وهو عدد يقبل القسمة على : ٧ .

الحل الثالث :

١

٩ ≡ - ١ { مود ٥ } ⇐ ٩ن ≡ ١ { مود ٥ } ، ن : عدد زوجي .

٩ ≡ - ١ { مود ٥ } ⇐ ٩ن ≡ { - ١ }ن { مود ٥ } ، ن : عدد فردي .

الآن :

١ + ٩! + ٩@ + ٩# + ... + ٩!$#! ≡ ١ - ١ + ١ - ١ +... - ١ + ١ ≡ ٠ { مود ٥ }

∴ ٥ | ع .

٢

المقدار : ٩! + ٩@ + ٩# + ... + ٩!$#! يمثل متسلسلة هندسية مجموعها : $\frac{9^{1432} - 9}{8}$

الآن :

٩# ≡ ١ { مود ٧ } ⇐ ٩!$#! ≡ ١ { مود ٧ }

⇐ ٩!$#@ ≡ ٩ { مود ٧ }

⇐ ٩!$#@ ≡ ٢ { مود ٧ } ....{١}

⇐ - ٩ ≡ - ٢ { مود ٧ } ....{٢}

بجمع : {١} + {٢} نجد أن : ٩!$#@ - ٩ ≡ ٠ { مود ٧ } ⇐ ٧ | ٩!$#@ - ٩

∵ { ٧ ، ٨ } = ١ ⇐ ٧ | $\frac{9^{1432} - 9}{8}$

100

إذا كان : جتا(23) + جا(23) = $\sqrt{٢}$ جا(s) **أوجد قيمة :** س .

الحل :

بالقسمة على : $\sqrt{٢}$ يصبح المقدار على الصورة :

جتا(23) + جا(23) = $\sqrt{٢}$ جا(s) Ü $\frac{1}{\sqrt{٢}}$ جتا(23) + $\frac{1}{\sqrt{٢}}$ جا(23) = جا(s)

Ü جا(45) جتا(23) + جتا(45) جا(23) = جا(s)

Ü جا(45 + 23) = جا(s)

Ü جا(s) = جا(68) **Ü s = 68°**